dim: Dimostro per induzione che $\mathbb{P}(|X_n| \in \{0,r\}) = 0$

$$\mathbb{P}(|X_{n-1} + C_n \theta_n| \in \{0,r\}) = \mathbb{E}(I_{\{0,r\}}(|X_{n-1} + C_n\theta_n|))$$

$$= \mathbb{E}\left(\mathbb{E}(I_{\{0,r\}}(|x + c\theta_n|))\Big|_{\substack{x = X_{n-1} \\ c = C_n}}\right)$$

$$\mathbb{E}(I_{\{0,r\}}(|x + c\theta_n|)) \leq I_{(0,r)_{\cup\{r,0\}}}(|x|, c)$$

$$= \mathbb{E}(I_{\{(0,r)_{\cup\{r,0\}}\}}(|X_{n-1}|, C_n)) = 0 \quad \text{per hp induttiva} \quad \blacksquare$$

4. PROCESSI A TEMPO CONTINUO

def: $(\Omega, \mathcal{F}, \mathbb{P})$, $(X_t)_{t\in I}$ ($I = [0,b]$ o $I = \mathbb{R}^+$) e' un **PROCESSO REALE** se $\forall t \in I$ X_t e' v.a. reale.

def: Diremo che $(X_t)_{t\in I}$ e' un **PROCESSO MISURABILE** se e' l'applicazione
$(t,\omega) \longmapsto X_t(\omega)$
e' misurabile su $\mathcal{B}(I) \otimes \mathcal{F}$

def: $\forall \omega \in \Omega$, e' l'applicazione $t \longrightarrow X_t(\omega)$ si chiama **TRAIETTORIA** del processo. (processo $X = (X_t)_{t\in I}$)

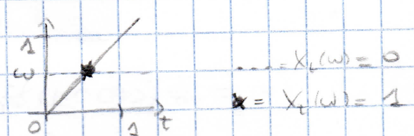
def: X e Y processi $\Omega \times I \longrightarrow \mathbb{R}$. X e Y sono **INDISTINGUIBILI** se $\exists\, \Omega_0 \in \mathcal{F}$ con $\mathbb{P}(\Omega_0) = 0$ t.c. $\forall \omega \notin \Omega_0$ si ha $X_t(\omega) = Y_t(\omega)$ $\forall t \in I$

Diciamo invece che Y e' una **VERSIONE** di X (o viceversa) se si ha $\forall t \in I \Rightarrow \mathbb{P}(X_t = Y_t) = 1$ (si dice anche MODIFICAZIONE)

OSS: Se X e Y sono indistinguibili allora Y e' una versione di X

CONTROESEMPIO: $\Omega = [0,1]$, $I = [0,1]$, $\mathbb{P} =$ Leb.

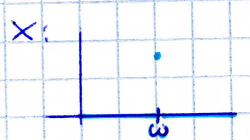
$$X_t(\omega) = I_{\{t\}}(\omega) = \begin{cases} 1 & \text{se } \omega = t \\ 0 & \text{altrimenti} \end{cases}$$

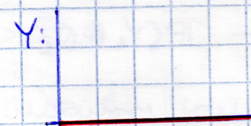


$Y \equiv 0$ $\quad (Y_t(\omega) = 0 \;\; \forall t, \forall \omega)$

$\{X_t = Y_t\} = \Omega \setminus \{t\} \Rightarrow \mathbb{P}(X_t = Y_t) = 1$

$\forall \omega$ non e' mai vero che $X_t(\omega) = Y_t(\omega)$ $\forall t \in [0,1]$
dato che $\forall \omega$:





OSS: Questo tipo di problemi (in cui versione $\not\Rightarrow$ indistinguibili) sono tipici di processi a traiettoria discontinua (che sono anche processi importanti)

def: Un processo X ha **TRAIETTORIA CONTINUA** se $\exists\, \Omega_0 \in \mathcal{F}$ con $\mathbb{P}(\Omega_0) = 0$ t.c. $\forall \omega \notin \Omega_0$ e' l'applic. $t \longmapsto X_t$ e' continua: $I \to \mathbb{R}$

def Un processo X e' **CADLAG** se $\exists\, \Omega_0 \in \mathcal{F}$ con $\mathbb{P}(\Omega_0) = 0$ t.c. $\forall \omega \in \Omega_0$ e' l'applic. $t \longmapsto X_t$ e' cadlag

NB: CADLAG $\Rightarrow$ TRAIET. C

def: $f: I \longrightarrow \mathbb{R}$ e' **CADLAG** (continue a droite limite a gauche) se $\forall t \in I$ $\exists \lim_{s \searrow t} f(s) = f(t)$ e $\exists \lim_{s \nearrow t} f(s) \in \mathbb{R}$ si pone $\Delta f(t) := f(t) - f(t$

OSS: Se Y è una versione di X e X e Y sono entrambe cadlag allora sono indistinguibili

dim: Basta prendere $\Omega' = \Omega_0 \cup \left(\bigcup_{q \in I, q \in \mathbb{Q}} (X_q \neq Y_q) \right)$

insieme della def di cadlag per le v.a. $\to \Omega_0 = \Omega_0^X \cup \Omega_0^Y$ → insieme in cui $t \mapsto Y_t$ non è cadlag

insieme in cui $t \mapsto X_t$ non è cadlag

Se Y è versione di X allora Ω' ha prob nulla ($\mathbb{P}(\Omega')=0$)

Inoltre $\forall \omega \notin \Omega'$ $t \longmapsto X_t(\omega)$ / $t \longmapsto Y_t(\omega)$ sono cadlag che coincidono su $\mathbb{Q} \cap I$

$\Rightarrow$ coincidono su tutto I

def: Una **FILTRAZIONE** è una succ. $(\mathcal{F}_t)_{t \in I}$ t.c. $\mathcal{F}_t \subseteq \mathcal{F}$ e $\mathcal{F}_s \subseteq \mathcal{F}_t$ se $s \leq t$.

def: Diciamo che una **FILTRAZIONE** è **CONTINUA da DESTRA** se

$$\mathcal{F}_t = \left(\bigcap_{h>0} \mathcal{F}_{t+h} \right) =: \mathcal{F}_{t^+}$$

def: $(\Omega, \mathcal{F}, \mathbb{P})$, $\mathcal{N} = \{$insieme degli eventi a prob. nulla$\}$

$\stackrel{!}{=} \{A \in \Omega$ t.c. $\inf_{B \in \mathcal{F}, B \supset A} \mathbb{P}(B) = 0\}$

Oppure: $\forall A \in \Omega$ poniamo $\mathbb{P}^*(A) = \inf_{B \in \mathcal{F}, B \supset A} \mathbb{P}(B)$ (misura esterna)

$\mathcal{N} = \{A \in \Omega$ t.c. $\mathbb{P}^*(A) = 0\}$

ESERCIZIO: $A \in \mathcal{N}$ sse $\exists B \in \mathcal{F}$ t.c. $A \subset B$ e $\mathbb{P}(B) = 0$ (es. di probabilità ☺)

def: La **FILTRAZIONE** $(\mathcal{F}_t)_{t \in I}$ è **COMPLETA** se $\mathcal{N} \subset \mathcal{F}_t$ $\forall t \in I$

def: $(\mathcal{F}_t)_{t \in I}$ **VERIFICA le PROPRIETÀ USUALI** (U.C.) (USUAL CONDITIONS) se è completa e continua da destra

def: $(X_t)_{t \in I}$ è un **PROCESSO ADATTATO** alla filtrazione $(\mathcal{F}_t)_{t \in I}$ se $\forall t$ X_t è $\mathcal{F}_t$-misurabile.

Dico che $(X_t)_{t \in \mathbb{R}^+}$ è **PROGRESSIVAMENTE MISURABILE** se $\forall s$ l'applicazione $(t, \omega) \longmapsto X_t(\omega)$ al variare di $t \in [0,s]$, $\omega \in \Omega$ è misurabile su $[0,s] \otimes \mathcal{F}_s$.

Equivalentemente $X|_{[0,s] \times \Omega}$ è $\mathcal{B}([0,s]) \otimes \mathcal{F}_s$-misurabile

ESERCIZIO: Se $(\mathcal{F}_t)_{t \in \mathbb{R}^+}$ verifica U.C. e X è cadlag e adattato allora è progressivamente misurabile

PARENTESI

Per cultura generale ☺: come si definisce un processo prevedibile?

$\mathcal{P} \subset \mathcal{B}(\mathbb{R}^+) \otimes \mathcal{F}$, $\mathcal{P} = \sigma\{(s,t] \times A$ con $A \in \mathcal{F}_s\}$

$\mathcal{P}$ si chiama **σ-ALGEBRA PREVEDIBILE**. X è **PREVEDIBILE** se l'applicazione $(t, \omega) \longmapsto X_t(\omega)$ è misurabile da $\mathcal{P}$ nei $\mathcal{B}(\mathbb{R})$.

def: X processo : $\Omega \times I \longrightarrow \mathbb{R}$ dico che $\mathcal{F}^X$ è la **FILTRAZIONE NATURALE AUMENTATA di X** se è la minima filtrazione che verifica U.C. e rende X adattato.

Vediamo come si costruise $\mathcal{F}^X$.
Poniamo: $\mathcal{F}^{0,0}_t = \sigma\{X_s : s \le t\}$

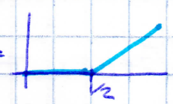
$$\mathcal{N} = \{A \subset \Omega \text{ t.c. } \mathbb{P}^*(A) = 0\}$$

$$\mathcal{F}^0_t = \sigma(\mathcal{F}^{0,0}_t \cup \mathcal{N})$$ (non è continua da dx, quindi poniamo

$$\mathcal{F}^X_t = \bigcap_{h>0} \mathcal{F}^0_{t+h}$$ (così questa è continua da dx)

ESEMPIO : $\Omega = [0,1]$, $I = [0,1]$ $\quad \mathbb{P}$ prob non banale

$$X_t(\omega) = \begin{cases} 0 & \text{se } t \le 1/2 \\ (t - 1/2)\, I_{\{1\}}(\omega) & t > 1/2 \end{cases}$$

$X_t(0) \equiv 0$, $X_t(1) =$ 

$$\mathcal{F}^{0,0}_t = \begin{cases} \{\emptyset, \Omega\} & t \le 1/2 \\ \mathcal{P}(\Omega) & t > 1/2 \end{cases}$$ parti di Ω $\Rightarrow$ NON è continua da dx $\rightarrow$ bisogna "regolarizzarla"

In generale prendiamo $I = [0,T]$, X sia un processo.

$\omega \longmapsto \{t \mapsto X_t(\omega)\}$ (fissato ω ho la sua traiettoria)

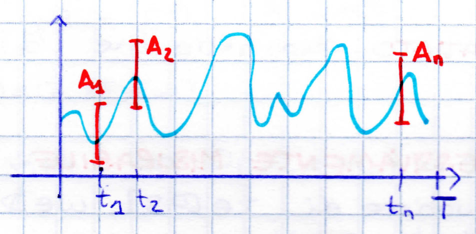
$\Rightarrow$ lo posso vedere come applicazione $\Omega \to \mathbb{R}^{[0,T]}$ = tutte le applicazioni da $[0,T] \to$

L'insieme delle applicazioni è infinitamente generato, e dobbiamo metterci sopra una σ-algebra :)

Su $\mathbb{R}^{[0,T]}$ posso prendere la σ-algebra:

$$S = \sigma\{w \in \mathbb{R}^{[0,T]} \text{ t.c. } w(t_1) \in A_1, \dots, w(t_n) \in A_n\}$$ (σ-alg dei cilindri

ove $t_1 < \dots < t_n \in [0,T]$ e $A_1, \dots, A_n$ aperti (o boreliani), $n \in \mathbb{N}$



OSS : Ogni processo è una v.a misurabile $(\Omega, \mathcal{F}) \longrightarrow (\mathbb{R}^{[0,T]}, S)$

dim: Infatti $\Gamma = \{\varphi : \varphi(t_1) \in A_1, \dots, \varphi(t_n) \in A_n\}$

$$\{X \in \Gamma\} = X^{-1}(\Gamma) = \{X_{t_1} \in A_1, \dots, X_{t_n} \in A_n\} \in \mathcal{F} \quad \blacksquare$$

Se $\mathcal{F}$ è completa e $(X_t)_{t \in I}$ ha traiettorie continue posso pensare X come v.a $\Omega \to C([0,T])$ (che mi piace un po' di più)

PROP: $S^c = \mathcal{B}(C([0,1]))$ ove $S^c = \sigma\{\varphi \in C([0,T])\ \varphi(t_1) \in A_1, \dots \varphi(t_n) \in A_n$ con $t_i \in [0,T]$, $n \in$
A_i aperti

dim: (per esercizio).

Prendiamo ora (X_t, Y_t) processi: $\Omega \times [0,T] \longrightarrow \mathbb{R}$. $X_{(\cdot)}, Y_{(\cdot)}$ sono v.a. : $(\Omega, \mathcal{E}, \mathbb{P}) \to (\mathbb{R}^{[0,T]}, S$
Posso definire $\mathcal{L}_X$ e $\mathcal{L}_Y$ come probabilità su $(\mathbb{R}^{[0,T]}, S)$

OSS : $\mathcal{L}_X = \mathcal{L}_Y$ sse Y è una versione di X

dim: Se sono uno una versione dell'altro allora $\{X_{t_1}\in A_1\}$ e $\{Y_{t_1}\in A_1\}$ differiscono per un insieme di probabilità nulla.

$\{X_{t_1}\in A_1 \dots X_{t_n}\in A_n\}$ e $\{Y_{t_1}\in A_1, \dots Y_{t_n}\in A_n\}$ differiscono per un insieme di $\mathbb{P}$ nulla.

Viceversa, se $\mathbb{P}(X_t\in A)=\mathbb{P}(Y_t\in A)$ $\forall A\in\mathcal{B}(\mathbb{R})$ allora $X_t=Y_t$ $\mathbb{P}$-q.c. ■

21
25/05/2012

$(\Omega,\mathcal{F},(\mathcal{F}_t)_{t\in I},\mathbb{P})$ con $I=[0,T]$ o $\mathbb{R}^+$

Supponiamo che $(\mathcal{F}_t)_{t\in I}$ verifichi U.C.. $M_t: I\times\Omega\to\mathbb{R}$

def: $(M_t)_{t\in I}$ è **MARTINGALA** se:
(1) M è adattata
(2) $\mathbb{E}(|M_t|)<+\infty$ $\forall t\in I$
(3) $\mathbb{E}(M_t\mid\mathcal{F}_s)=M_s$ $\forall t,s\in I$
Lo stesso modo si definiscono super e sub martingala.

ESEMPIO: Se $(X_t)_{t\in I}$ verifica
(1) X adattata
(2) $\mathbb{E}(|X_t|)<+\infty$ $\forall t\in I$
(3) X_t-X_s è indipendente da $\mathcal{F}_s$ $\forall t>s$
(4) $\mathbb{E}(X_t-X_s)=0$

$\Rightarrow X$ è una martingala
Infatti:

è $\mathcal{F}_s$ mis, posso togliere la sp. cond.

$$\mathbb{E}(X_t\mid\mathcal{F}_s)=\underbrace{\mathbb{E}(X_t-X_s\mid\mathcal{F}_s)}_{=0}+X_s=X_s$$

ESEMPIO: $X_t=\mathbb{E}(X\mid\mathcal{F}_t)$ con $X\in L^1$ è martingala.

OSS: Se $(M_t)_{t\in I}$ è una martingala, allora $X_t=|M_t|$ (o $X_t=\varphi(M_t)$ φ convessa) è una submartingala non negativa.
(Valgono anche altre proprietà analoghe al discreto, ma non ce le dirà tutte, credo ☺)

TEO: (**DISUGUAGLIANZA di DOOB**) $(X_s)_{s\in I}$ submartingala non negativa, $I=[0,T]$ e processo a traiettoria càdlàg

$$\Rightarrow \mathbb{P}(\sup_{s\in[0,T]}X_s\geq\lambda)\leq\frac{1}{\lambda}\mathbb{E}(X_T) \qquad (1)$$

$$\mathbb{E}(\sup_{s\in[0,T]}X_s^p)\leq q^p\,\mathbb{E}(X_T^p) \quad \text{con } \frac{1}{p}+\frac{1}{q}=1 \quad p>1 \qquad (2)$$

dim: Poniamo $D_n=\{\frac{kT}{2^n}: k=0,\dots 2^n\}$, $D=\bigcup_n D_n$

• numeri diadici se $T=1$
• sono un denso di $[0,T]$

$N_k^{(n)}=X_{\frac{kT}{2^n}}$ $\qquad \mathcal{G}_k^{(n)}=\mathcal{F}_{\frac{kT}{2^n}}$

è facile vedere che $(N_k^{(n)})_{k=0,\dots 2^n}$ è una submartingala discreta relativamente a $(\mathcal{F}_k^{(n)})$

(1) So che $\mathbb{P}(\sup_{k=0,\dots 2^n}N_k^{(n)}\geq\lambda)\leq\frac{1}{\lambda}\mathbb{E}(X_T)$ $\leftarrow \mathbb{E}(N_{2^n}^{(n)})$

Abbiamo che $\{\sup_{k=0,\dots 2^{n+1}}N_k^{(n+1)}\geq\lambda\}\supseteq\{\sup_{k=0,\dots 2^n}N_k^{(n)}\geq\lambda\}$ perché al crescere di n infittisco i valori di k.

$$\Rightarrow \mathbb{P}(\bigcup_n\{\sup_{k=0,\dots 2^n}N_k^{(n)}\geq\lambda\})=\lim_{n\to\infty}\mathbb{P}(\{\sup_{k=0,\dots 2^n}N_k^{(n)}\geq\lambda\})\leq\frac{1}{\lambda}\mathbb{E}(X_T)$$

$$\mathbb{P}(\sup_{\ell\in D}X_\ell\geq\lambda)\leq\frac{\mathbb{E}(X_T)}{\lambda}$$ perché se $\ell\in D$ $\exists n,k$ t.c. $X_\ell=N_k^{(n)}$

Dato che D è denso in $[0,T]$ e X ha traiettorie càdlàg
$\Rightarrow \sup_{\ell \in D} X_\ell = \sup_{s \in [0,T]} X_s$:) quindi continue almeno da destra

Allo stesso modo si dimostra (2) [per esercizio] ■

def: $\tau : \Omega \longrightarrow \mathbb{R}^+ \cup \{+\infty\}$ è un **TEMPO di ARRESTO** rispetto a $(\mathcal{F}_t)_{t\in[0,+\infty]}$ (che suppongo verificare le U.C.) se $\forall t \geq 0$

$\{\tau \leq t\} \in \mathcal{F}_t$ (o equiv se $\{\tau < t\} \in \mathcal{F}_t$)
[solo se si verificano le U.C. ! se no non è vero)

dim: (dell'equivalenza)

$$\{\tau \leq t\} = \bigcap_n \{\tau < t + 1/n\}$$

Quindi se $\{\tau < t+1/n\} \in \mathcal{F}_{t+1/n}$ ho che $\{\tau \leq t\} \in \mathcal{F}_{t+1/n}$ $\forall n$
Ma per la continuità a dx della filtrazione

$$\bigcap_n \mathcal{F}_{t+1/n} = \mathcal{F}_t \quad \Rightarrow \quad \{\tau \leq t\} \in \mathcal{F}_t$$

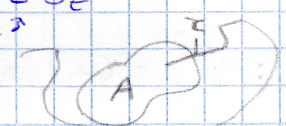
Viceversa, $\{\tau < t\} = \bigcup_n \{\tau \leq t - 1/n\}$

Quindi se $\{\tau < t-1/n\} \in \mathcal{F}_{t-1/n} \subset \mathcal{F}_t \Rightarrow \{\tau < t\} \in \mathcal{F}_t$ ■

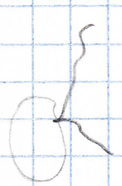
PROP: $(X_t)_{t\in\mathbb{R}^+}$ processo adattato e càdlàg a valori in $\mathbb{R}^n$. Sia A aperto (o A chiuso)
Sia $\tau = \inf\{t \geq 0 : X_t \in A\}$. Allora τ è tempo di arresto.
[N.B. $(\mathcal{F}_t)$ verifica le U.C. se no non è vero]
se A chiuso X deve essere proc. continuo (non solo càdlàg)

dim: Sia A aperto. "Usiamo" la def con $\{\tau < t\} \in \mathcal{F}_t$
↳ verifichiamo che vale?

$$\{\tau < t\} = \bigcup_{\substack{q \in \mathbb{Q} \\ q < t}} \{X_q \in A\} \in \mathcal{F}_t \quad \text{ok}$$



può succedere questo



Sia ora A chiuso. $A_n = \{x : \text{dist}(x,A) < 1/n\} \Rightarrow A_n$ è aperto

Poniamo $\tau^n = \inf\{t : X_t \in A_n\}$.
τ^n è t.a. e inoltre $\tau^n \leq \tau$ e $\tau^n \leq \tau^m$ se $n \leq m$. (...)

LEMMA: $\tau^* = \sup_n \tau^n$, τ^* è tempo di arresto.

dim: $\{\tau^* \leq t\} = \bigcap_n \{\tau^n \leq t\} \in \mathcal{F}_t$ perché τ^n è t.a. ■

(...) Quindi abbiamo $\tau^* = \sup_n \tau^n$ t.a. e so che $\tau^* \leq \tau$

$X_{\tau^*} = \lim_{n\to\infty} X_{\tau^n}$ perché X continuo

Ma allora $X_{\tau^n} \in A_n$ $\forall n$ ma $A_m \subset A_n$ se $m < n$

$\Rightarrow X_{\tau^*} \in A_n$ $\forall n$ $\Rightarrow X_{\tau^*} \in A \Rightarrow \tau^* \geq \tau \Rightarrow \tau^* = \tau$ è t.a. ■

def: $(\Omega, \mathcal{F}, \mathbb{P})$ $(\mathcal{F}_t)_{t\in[0,+\infty]}$ che verifica U.C., τ tempo di arresto
$\mathcal{F}_\tau = \{A \in \mathcal{F} : \forall t,\ A \cap \{\tau \leq t\} \in \mathcal{F}_t\}$

PROPRIETÀ:
1. $\mathcal{F}_\tau$ è σ-algebra
2. Se $\sigma \leq \tau \Rightarrow \mathcal{F}_\sigma \subseteq \mathcal{F}_\tau$
3. $\mathcal{F}_{\tau+} = \bigcap_n \mathcal{F}_{\tau+1/n} = \mathcal{F}_\tau$
4. X càdlàg $\Rightarrow X_\tau$ è $\mathcal{F}_\tau$ misurabile

dim: (1 e 2 come caso discreto)

(3) $A \in \mathcal{F}_{\tau+} \Rightarrow A \in \mathcal{F}_{\tau+\varepsilon} \quad \forall \varepsilon > 0$

$\Rightarrow A \cap \{\tau + \varepsilon \leq t\} \in \mathcal{F}_t \quad \forall t$

$A \cap \{\tau \leq t - \varepsilon\} \in \mathcal{F}_t \quad \forall t \Rightarrow A \cap \{\tau \leq t\} \in \mathcal{F}_{t+\varepsilon} \subset \underset{\mathcal{F}_t}{\overset{\|}{\mathcal{F}_{t+}}}$ per continuità della filtr.

(...)

LEMMA: τ t.a. finito (ie $\mathbb{P}(\tau = +\infty) = 0$) $\quad \tau^n = \sum_{k=1}^{\infty} \frac{k+1}{2^n} I_{[\frac{k}{2^n}, \frac{k+1}{2^n})} \Rightarrow \tau^n \searrow \tau$ ed è t.a.

dim: Osserviamo che $\tau^n \searrow \tau$ e che $\{\tau^n \leq t\} = \{\tau < \frac{k}{2^n}\}$ ove $\frac{k}{2^n}$ è ie max numero di questo tipo $< t$, se t è intero, altrimenti se $t = k/2^n$
$\{\tau^n \leq t\} = \{\tau < t\} \Rightarrow \mathcal{F}_t$ $\quad \in \mathcal{F}_t \quad$ ok ■

(...) (4) Abbiamo che X è adattato e cadlag e $\mathbb{P}(\tau < +\infty) = 1$
(ie τ è t.a. finito)
Prendo $\tau^n \searrow \tau$ come nel lemma. X_{τ^n} è $\mathcal{F}_{\tau^n}$-misurabile
(perché sono nel caso discreto)

Inoltre so che $X_{\tau^n} \longrightarrow X_\tau$ perché X ha traiettorie cadlag.
Abbiamo anche che se $n \leq m$ allora $\mathcal{F}_{\tau^m} \subseteq \mathcal{F}_{\tau^n}$
(perché $\tau^m \leq \tau^n$)

$\Rightarrow X_\tau$ è $\mathcal{F}_{\tau^n}$-misurabile $\quad (\forall n)$
Osserviamo anche che $\tau^n \leq \tau + 1/2^n \Rightarrow X_\tau$ è $\mathcal{F}_{\tau + 1/2^n}$-misur. $\forall n$

$\Rightarrow X_\tau$ è $\mathcal{F}_{\tau+}$-mis $\Rightarrow \mathcal{F}_\tau$-mis perché $\mathcal{F}_{\tau+} = \mathcal{F}_\tau$ ■

TEO: (ARRESTO OPZIONALE) $(M_t)_{t \geq 0}$ sub super martingala ≥ 0 con traiettorie cadlag e $\sup_t (\mathbb{E}(M_t^p)) < +\infty$ per qualche p. τ t.a. finito.

$$\Rightarrow \mathbb{E}(M_\tau) \underset{\geq}{\leq} \mathbb{E}(M_0)$$

dim. Dalla dis L^p di Doob, chiamo $M_t^* = \sup_{s \leq t} M_s$

$\Rightarrow \mathbb{E}((M_t^*)^p) < +\infty$

- Supponiamo che $\tau \leq T$.
Allora possiamo prendere $N_k^{(n)} = M_{\frac{kT}{2^n}} \quad \mathcal{G}_k^{(n)} = \mathcal{F}_{\frac{kT}{2^n}} \quad \tau^n =$ come lemma
$N^{(n)}$ è submart relativa a $\mathcal{G}_k^{(n)}$

$\Rightarrow \mathbb{E}(N_{\tau^n}^{(n)}) \leq \mathbb{E}(N_0^{(n)}) = \mathbb{E}(M_0)$

$\overset{\|}{\mathbb{E}(M_{\tau^n})} \Rightarrow \quad \mathbb{E}(M_{\tau^n}) \leq \mathbb{E}(M_0) \quad (**)$

$M_{\tau^n} \longrightarrow M_\tau$ $\mathbb{P}$-q.c. e inoltre $M_{\tau^n} \leq M_T^*$

$\Rightarrow M_{\tau^n} \longrightarrow M_\tau$ in L^1
Passo al limite della relazione (**) e ottengo la tesi

- Voglio non supporre più che $\tau \leq T$

$M_{\tau \wedge k} \leq 1 + \underbrace{\sup_t M_t}_{\in L^1}$. Ma allora $M_{\tau \wedge k} \xrightarrow[k \to \infty]{\text{perché } \tau < +\infty} M_\tau$ $\mathbb{P}$-q.c ed è U.I.

$\Rightarrow M_{\tau \wedge k} \xrightarrow{k \to \infty} M_\tau$ in L^1 e $\mathbb{E}(M_{\tau \wedge k}) \leq \mathbb{E}(M_0)$ ■

TEO: (ESISTENZA VERSIONE REGOLARE) $(M_t)_{t\geq 0}$ martingala rispetto a $(\mathcal{F}_t)_{t\geq 0}$ che soddisfa le v.c. Allora $\exists$ $(\tilde{M}_t)_{t\geq 0}$ versione di $(M_t)_{t\geq 0}$ tale che $(\tilde{M}_t)_{t\geq 0}$ sia cadlag

30/05/2012

MOTO BROWNIANO

è il più importante processo stocastico (a tempo continuo)

def: LEGGE NORMALE su $\mathbb{R}$: dati $\mu \in \mathbb{R}$, $\sigma^2 \in (0,+\infty)$ è la probabilità assolutamente continua con densità

$$f(x) = \frac{1}{\sqrt{2\pi}\,\sigma} e^{\frac{-(x-\mu)^2}{2\sigma^2}}$$

una v.a. X si dice NORMALE $X \sim N(\mu, \sigma^2)$ se lo è la sua legge
$X \in L^p \ \forall p$ $\quad \mathbb{E}(X) = \mu$, $\operatorname{Var}(X) = \sigma^2$

la FUNZIONE CARATTERISTICA è $\varphi_X(\theta) = \mathbb{E}[e^{i\theta X}] = e^{i\theta\mu - \frac{1}{2}\sigma^2\theta^2}$ $\quad \theta \in \mathbb{R}$

def: Se $\sigma^2 = 0$ definiremo $N(\mu, 0) = \delta_\mu$ (δ di dirac)
cioè se ho una v.a. $\sim N(\mu, 0)$ allora questo è $= \mu$ q.c.

OSS: Le formule per $E(X)$, $\operatorname{Var}(X)$ e $\varphi_X(\theta)$ valgono per $\sigma^2 = 0$

PROPRIETÀ

- $X \sim N(\mu, \sigma^2)$ $\qquad Y = aX + b \sim N(a\mu + b, a^2\sigma^2)$
- $X_1 \sim N(\mu_1, \sigma_1^2), \dots, X_n \sim N(\mu_n, \sigma_n^2)$ v.a. indipendenti. Allora $\forall a_1, \dots, a_n$
  $a_1 X_1 + \dots + a_n X_n$ è normale

def: NORMALI MULTIVARIATE: Sia $X = (X_1, \dots, X_d)$ vettore aleatorio d-dim
X si dice NORMALE se ogni combinazione lineare delle sue componenti è una v.a. reale normale, cioè
$\langle u, X\rangle = u_1 X_1 + \dots + u_d X_d$ è normale $\quad \forall u \in \mathbb{R}^d$

In particolare abbiamo che X_i è normale $\forall i$. Definiamo
$\mu := (\mu_1, \dots, \mu_d) = (\mathbb{E}(X_1), \dots, \mathbb{E}(X_d)) = \mathbb{E}(X)$
$K_{ij} := \operatorname{Cov}(X_i, X_j)$ $\quad$ (ben def perché le $X_i \sim N$) $\quad K \in M^{d\times d}(\mathbb{R})$
allora possiamo definire la FUNZIONE CARATTERISTICA

è v.a. reale normale $N(\langle\theta,\mu\rangle, \langle\theta, K\theta\rangle)$

$$\varphi_X(\theta) = E(e^{i\langle\theta, X\rangle}) \stackrel{*}{=} e^{i\langle\theta,\mu\rangle - \frac{1}{2}\langle\theta, K\theta\rangle}$$

* sostituiamo nella formula sopra $\theta \to 1$, $X \to N(\dots)$

Scriveremo $X \sim N(\mu, K)$ ove $\mu \in \mathbb{R}^d$ e $K \in M^{d\times d}(\mathbb{R})$.

PROP: $\forall \mu \in \mathbb{R}^d$, $\forall K \in M^{d\times d}(\mathbb{R})$ simmetrica e semidefinita positiva allora
$\exists$ $X \sim N(\mu, K)$

OSS: Se $\mu = \underline{0}$ e $K = I_d$ allora $N(\underline{0}, I_d)$ è detta LEGGE NORMALE STANDARD s

Se $Z_1, \dots, Z_d$ sono v.a. $N(0,1)$ su $\mathbb{R}$, indipendenti, allora
$Z = (Z_1, \dots, Z_d) \sim N(0, 1)$ in $\mathbb{R}^d$.

OSS: Dato K simmetrica e semidefinita positiva $\Rightarrow \exists$ $v_1, \dots, v_d$ base ortonormale di $\mathbb{R}^d$, $\exists \lambda_1, \dots, \lambda_d \geq 0$ t.c. $K v_i = \lambda_i v_i$ (i.e. è diagonalizzabile)

def: Definiamo $\sqrt{K}$ in modo che $\sqrt{K} v_i = \sqrt{\lambda_i}\, v_i$ ovvero, $\sqrt{K}$ ha gli stessi autovettori e gli autovalori sono radice

OSS: $(\sqrt{K})^2 = \sqrt{K} \cdot \sqrt{K} = K$ (prod matrice), e $\sqrt{K}$ è simmetrica (se K simm, ≥ 0, altrimenti non è def)

Allora se $Z = (Z_1, \dots, Z_d) \sim N(0, I_d)$ definendo $X = \sqrt{K} Z + \mu$
si ha che $X \sim N(\mu, K)$

def: Date v.a. $X_1, \dots, X_d$ esse si dicono **CONGIUNTAMENTE NORMALI** se il vettore $(X_1, \dots, X_d)$ è normale.

TEO: Se $X_1, \dots, X_d$ sono congiuntamente normali, esse sono indipendenti sse sono scorrelate, cioè $Cov(X_i, X_j) = 0 \quad \forall i \neq j$

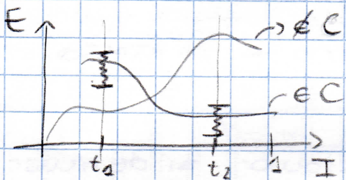
TEO: Sia $\{X^{(n)}\}_{n \in \mathbb{N}}$ v.a. normali su $\mathbb{R}^d$ (i.e. $X^{(n)} = (X_1^{(n)}, \dots, X_d^{(n)}) \sim N(\mu^{(n)}, K^{(n)})$)
supponiamo che $X^{(n)} \xrightarrow{d} Y$ (conv. in legge) allora $Y \sim N(\mu, K)$
e inoltre: $\mu = \lim_{n \to \infty} \mu^{(n)}$ e $K_{ij} = \lim_{n \to \infty} K_{ij}^{(n)} \quad \forall ij$

OSS: Lo stesso vale se la convergenza in distribuzione (legge) è rimpiazzata da $\xrightarrow{q.c.}$, $\xrightarrow{PROB}$, $\xrightarrow{L^p}$.

def: Si dice **PROCESSO** una famiglia di v.a. $X = \{X_t\}_{t \in I}$, tutte definite nello stesso spazio e tutte a valori nello stesso spazio misurabile $(E, \mathcal{E})$

I è arbitrario ma tipicamente $I \subseteq \mathbb{R}$
$(E, \mathcal{E})$ " " " $(E, \mathcal{E})$ $(\mathbb{R}^d, \mathcal{B}(\mathbb{R}^d))$

def: Si dice **SPAZIO delle TRAIETTORIE** lo spazio prodotto $(E^I, \mathcal{E}^I)$ dove
$E^I := \{X = (X_t)_{t \in I}$ ovvero $X : I \to E\}$
$\mathcal{E}^I := \sigma(\mathcal{C})$ ove $\mathcal{C} = \{C \subseteq E^I$ t.c. $C = \{X \in E^I : X_{t_1} \in A_1, \dots, X_{t_n} \in A_n\}$ $n \in \mathbb{N}$; $t_1, \dots, t_n \in I$; $A_1, \dots, A_n \in \mathcal{E}\}$



def: **PROIEZIONI**: $\forall s \in I$, $\pi_s : E^I \to E$
$X = (X_t)_{t \in I} \longmapsto \pi_s(X) = X_s$

OSS: $\sqcup = \{\pi_{t_1} \in A_1, \dots, \pi_{t_n} \in A_n\}$
e quindi possiamo definire $\mathcal{E}^I$ equivalentemente come la più piccola σ-algebra che rende misurabili tutte le proiezioni
$$\mathcal{E}^I = \sigma(\{\pi_t\} \ t \in I)$$

OSS: Un processo stocastico $X = \{X_t\}_{t \in I}$ def su $(\Omega, \mathcal{A}, \mathbb{P})$ a valori in $(E, \mathcal{E})$ può essere visto come un'unica v.a. $X : (\Omega, \mathcal{A}, \mathbb{P}) \longrightarrow (E^I, \mathcal{E}^I)$
$\omega \longmapsto X(\omega) = \{X_t(\omega)\}_{t \in I}$

Oss che l'applicazione X (che ovviamente esiste) è misurabile grazie alla def di $\mathcal{E}^I$. Infatti:

Per crit. gen. basta considerare $C \in \mathcal{C} \Rightarrow X^{-1}(C) = \{X \in C\} = \{X_{t_1} \in A_1, \dots, X_{t_n} \in A_n\}$
$= \{X_{t_1} \in A_1\} \cap \dots \cap \{X_{t_n} \in A_n\}$
$\cap$ finita di cose in $\mathcal{A}$ sta in $\mathcal{A}$ ☺ $\leftarrow$ $\hat{\mathcal{A}}$ $\hat{\mathcal{A}}$

def: Si dice **LEGGE del PROCESSO** $X = \{X_t\}_{t \in I}$ la legge della v.a. $X : (\Omega, \mathcal{A}, \mathbb{P}) \longrightarrow (E^I, \mathcal{E}^I)$
e si indica con μ_X.

OSS: μ_X è una probabilità su $(E^I, \mathcal{E}^I)$

def: Sia X un processo def su $(\Omega, \mathcal{A}, \mathbb{P})$ a valori in $(E, \mathcal{E})$. Si dicono **LEGGI FINITO DIMENSIONALI** la famiglia delle leggi dei vettori $(X_{t_1}, \dots, X_{t_n})$ al variare di $n \in \mathbb{N}$ e $t_1, \dots, t_n \in I$.

Chiamiamo $\mu^{(n)}_{t_1, \dots, t_n}$ = legge di $(X_{t_1}, \dots, X_{t_n})$ (legge di un vettore aleatorio)

questa è una probabilità su $(E^n, \mathcal{E}^n)$

PROP: La legge di un processo X è identificata dalle leggi finito dimensionali

dim: μ_X è una probabilità su $(E^I, \mathcal{E}^I)$.

$\Rightarrow$ Essa è identificata dai valori che assume su una base di $\mathcal{E}^I$, per esempio gli insiemi cilindrici $\mathcal{C}$.

Prendo $C \in \mathcal{C}$.

$$\mu_X(C) = \mathbb{P}(X \in C) = \mathbb{P}(X_{t_1} \in A_1, \dots, X_{t_n} \in A_n)$$
$$= \mathbb{P}((X_{t_1}, \dots, X_{t_n}) \in A_1 \times \dots \times A_n) = \mu^{(n)}_{t_1 \dots t_n}(A_1 \times \dots \times A_n) \ \blacksquare$$

def: Un processo (stoc.) reale $X = \{X_t\}_{t \in I}$ I qualunque, si dice **PROCESSO GAUSSIANO** se $\forall n \in \mathbb{N}$, $\forall t_1, \dots, t_n \in I$ il vettore $(X_{t_1}, \dots, X_{t_n})$ è normale su $\mathbb{R}^n$ (equival. se ogni comb. lin. finita delle X_t è una v.a. reale normale.)

OSS: se $I = \{1, \dots, n\}$ un processo gaussiano è la stessa cosa di un vettore normale.

Dato $X = \{X_t\}_{t \in I}$ un processo gaussiano si definiscono le funzioni media e covarianza:

$\mu(t) = \mathbb{E}(X_t)$ $\quad \mu: I \to \mathbb{R}$

$K(s,t) = \mathrm{Cov}(X_s, X_t)$ $\quad K: I \times I \to \mathbb{R}$

OSS: le leggi finito dimensionali di un processo gaussiano $X = \{X_t\}_{t \in I}$ sono determinate da media e covarianza.

dim: $\forall n, t_1, \dots, t_n$ $(X_{t_1}, \dots, X_{t_n})$ è normale su $\mathbb{R}^n$

$\Rightarrow$ la sua legge è identificata da:

- vettore media $(\mathbb{E}(X_{t_1}), \dots, \mathbb{E}(X_{t_n})) = (\mu(t_1), \dots, \mu(t_n))$
- matrice cov. $\mathrm{Cov}(X_{t_i}, X_{t_j}) = K(t_i, t_j)$ $\blacksquare$

def: Siano $X_1, \dots, X_n, \dots$ v.a. iid $E(X_i) = 0$, $\mathrm{Var}(X_i) = 1$ es $\mathbb{P}(X_i = \pm 1) = 1/2$

la **PASSEGGIATA ALEATORIA** è il processo $\{S_n\}_{n \in \mathbb{N}_0}$ $S_0 = 0$, $S_n = X_1 + \dots + X_n$

CULTURA GENERALE :)

Sembra una cosa banale ma non lo è, per esempio chiediamoci $S_N \approx$?

Calcoliamo, fissato ε ($= 1/10$) $\mathbb{P}(\varepsilon a_N \leq |S_N| \leq \frac{1}{\varepsilon} a_N) \geq \frac{1}{2}$ vicino a 1

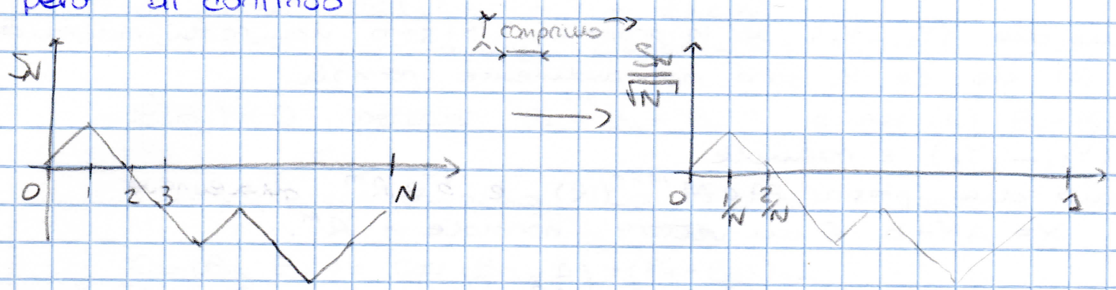
vogliamo trovare a_N deterministica t.c. ↗ con $N >> 1$

$a_N = \sqrt{N}$, $\frac{S_N}{\sqrt{N}} \xrightarrow{d} N(0,1)$ e dunque $\mathbb{P}(a < |\frac{S_N}{\sqrt{N}}| < b) \longrightarrow \mathbb{P}(a \leq |Z| \leq b)$ normale

va bene solo questo a_N

a piccolo, b grande

Qualitativamente ora vogliamo passare a qualcosa di analogo però di continuo



def: Si dice **MOTO BROWNIANO** qualunque processo stocastico reale $B = \{B_t\}_{t \in [0,\infty)}$ tale che:

(a) $B_0 = 0$ q.c.

(b) $\forall k \geq 2$, $\forall t_0 < t_1 < \dots < t_k < \infty$ le v.a. $\{B_{t_i} - B_{t_{i-1}}\}_{i=1,\dots,k}$ sono indipendenti (PROPRIETÀ di INCREMENTI INDIPENDENTI)

(c) $\forall s < t$ la legge di $B_t - B_s$ dipende solo da $t-s$ (INCREMENTI STAZIONARI) (e resto dista)

se $t_i - s_i$ e $=$ allora $\to$ il salto sarà lo stesso; questo discende magicamente in

Più precisamente chiediamo che $B_t - B_s \sim N(0, t-s)$

(d) q.c. le traiettorie $t \mapsto B_t$ sono continue

TEO: Se rilasso la condizione (c) richiedendo solo gli incrementi stazionari ma non gaussiani, allora il processo $(\beta_t)_{t\in[0,\infty)}$ così ottenuto è dato da:

$$\beta_t = a B_t + ct \qquad a, c \in \mathbb{R}\ ; \quad B \text{ moto browniano.}$$

Quindi praticamente anche se non chiediamo la legge normale lei salta fuori lo stesso! (in pratica viene fuori da LIMITE CENTRALE, credo)

OSS: $(\Omega, \mathcal{A}, \mathbb{P})$ scriviamo esplicitamente (d)

$\exists\, \Omega_0 \in \mathcal{A}$ con $\mathbb{P}(\Omega_0) = 0$ $\forall \omega \notin \Omega_0$ la funzione $t \mapsto B_t(\omega)$ è continua (cioè chiediamo che fissato ω la funzione sia continua in t, per q.o. ω)

In pratica uno vorrebbe scrivere $C \subseteq \mathbb{R}^{[0,\infty)}$

$$C = \{f : [0,\infty) \to \mathbb{R} \text{ continua}\}$$

e chiedere $\mathbb{P}(B \in C) = 1$ $\underline{\underline{\text{MA!}}}$ $C \notin (\mathcal{B}(\mathbb{R}))^{[0,\infty)}$

dunque dobbiamo chiedere che $\{B \in C\} \supseteq \Omega_0^c$ con $\mathbb{P}(\Omega_0) = 0$ (Ω_0 misurabile!)

TEO: (WIENER - 1923) il moto Browniano esiste.

PROP: Dato un M.B. $\{B_t\}_{t\in[0,\infty)}$, $\forall k \in \mathbb{N}$, $0 \leq t_1 < t_2 < \dots < t_k < \infty$ il vettore $(B_{t_1}, \dots, B_{t_k})$ è normale. (OSS che $\Rightarrow$ è un proc. GAUSSIANO)

Tale vettore è ass. continuo $\Leftrightarrow t_1 > 0$, nel qual caso la sua densità è data da:

$$f^{(k)}_{t_1 \dots t_k}(x_1, \dots, x_k) = \frac{\exp\left\{-\frac{1}{2}\sum_{i=1}^{k} \frac{(x_i - x_{i-1})}{t_i - t_{i-1}}\right\}}{(2\pi)^{k/2}\sqrt{t_1(t_2-t_1)\cdots(t_k-t_{k-1})}} \qquad [x_0 = 0]$$

CORO: La def. di M.B. ne identifica le leggi finito dimensionale detta $\mu^{(k)}_{t_1 \dots t_k} =$ legge di $(B_{t_1}, \dots, B_{t_k})$. Si ha

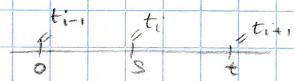
$$\mu^{(k)}_{t_1 \dots t_k}(dx_1, \dots, dx_k) = \begin{cases} f^{(k)}_{t_1 \dots t_k}(x_1, \dots, x_k)\, dx_1 \cdots dx_k & \text{se } t_1 > 0 \\ \delta_0(dx_1)\, f^{(k)}_{t_2 \dots t_k}(x_2, \dots, x_k)\, dx_2 \cdots dx_k & \text{se } t_1 = 0 \end{cases}$$

Quindi è determinato univocamente la legge del M.B. su $(\mathbb{R}^{[0,\infty)}, \mathcal{B}(\mathbb{R})^{[0,\infty)})$

dim: ($\Rightarrow$) Dobbiamo mostrare che $(B_{t_1}, \dots, B_{t_n})$ è normale $\forall$ scelta di istanti $0 \le t_1 < \dots < t_n$ e $\forall n \in \mathbb{N}$.
GIA' FATTO! (nella dim. precedente)

$\mathbb{E}(B_t) = 0$ perché $B_t \overset{(a)}{=} B_t - B_0$ e per (c) $B_t - B_0 \sim \mathcal{N}(0, t-0)$

$\forall\, 0 \le s \le t$ calcoliamo $Cov(B_s, B_t)$ (tanto è simmetrica)



$$\begin{aligned} Cov(B_s, B_t) &= Cov(B_s, B_s + (B_t - B_s)) \\ &\overset{!}{=} Cov(B_s, B_s) + Cov(B_s, B_t - B_s) \\ &\overset{!}{=} var(B_s) + \underbrace{Cov(B_s - B_0, B_t - B_s)}_{} = 0 \text{ per(b) perché sono 2 incrementi disgiunti} \\ &\overset{!}{=} var(B_s - B_0) \underset{\substack{\downarrow \\ (c) \to B_s - B_0 \sim \mathcal{N}(0,s)}}{=} s = \min(s,t) \end{aligned}$$

($\Leftarrow$) **(a)** Dobbiamo mostrare che $B_0 = 0$ q.c.
$\mathbb{E}(B_0) = 0$ per hp
$Var(B_0) = Cov(B_0, B_0) = \min(0,0) = 0$

in realtà non serve nemmeno * $\leftarrow$ (Sappiamo che $B_0 \sim \mathcal{N}$ e dunque) $B_0 = 0$ q.c.

* perché $Var(B_0) = \mathbb{E}((B_0 - \mathbb{E}(B_0))^2) = 0 \Rightarrow B_0 = \mathbb{E}(B_0) = 0$

(c) $B_t - B_s$ è normale perché (B_t, B_s) sono congiuntamente normali perché componenti di un processo gaussiano. (e $B_t - B_s$ è comb. lin.)

$\mathbb{E}(B_t - B_s) = \mathbb{E}(B_t) - \mathbb{E}(B_s) = 0 - 0 = 0$

$Var(B_t - B_s) = Cov(B_t - B_s, B_t - B_s) = Cov(B_t, B_t) + Cov(B_s, B_s) - 2\,Cov(B_s, B_t)$

$\overset{!}{=} t \wedge t + s \wedge s - 2\, s \wedge t \underset{s \le t \text{ senza} = \text{ per simmetria}}{=} t + s - 2s = t - s$

(b) Le v.a. $B_{t_1}, B_{t_2} - B_{t_1}, \dots, B_{t_n} - B_{t_{n-1}}$ sono congiuntamente normali perché ogni comb. lineare di tali variabili è una comb. lineare di $B_{t_1}, B_{t_2}, \dots, B_{t_n}$ che sono componenti di un processo gaussiano e quindi è normale.

Per l'indipendenza basta mostrare che sono scorrelate.
Sia $i < j$ e calcoliamo $Cov(B_{t_i} - B_{t_{i-1}}, B_{t_j} - B_{t_{j-1}})$

$Cov(B_{t_i} - B_{t_{i-1}}, B_{t_j} - B_{t_{j-1}}) \overset{\text{conti}}{=} (\dots) = t_i \wedge t_j + t_{i-1} \wedge t_{j-1} - t_{i-1} \wedge t_j - t_i \wedge t_{j-1}$

$i < j \Rightarrow t_i < t_j$ e $t_i \le t_{j-1}$ $\quad \overset{!}{=} t_i + t_{i-1} - t_{i-1} - t_i = 0$ ∎

OSS: Abbiamo visto che (a), (b) e (c) determinano le leggi finito dimensionali del moto Browniano (viceversa, (a), (b) e (c) sono proprietà delle leggi finito dimensionali, cioè possono essere verificate conoscendo le leggi di $B_{t_1}, \dots, B_{t_n}$).
È naturale chiedersi, se (a), (b), (c) sono soddisfatte, lo è anche (d)?
La risposta è NO.

Sia $(\mathbb{R}^{[0,\infty)}, \mathcal{B}(\mathbb{R})^{[0,\infty)})$ sp. delle traiettorie. Se B soddisfa (a), (b), (c) è ben determinata la legge μ_B di B su $(\mathbb{R}^{[0,\infty)}, \mathcal{B}(\mathbb{R})^{[0,\infty)})$

$\mu_B(A) = \mathbb{P}(B \in A) \quad \forall A \subseteq \mathbb{R}^{[0,\infty)}$ che sia $\mathcal{B}(\mathbb{R})^{[0,\infty)}$-misurabile

Sia $A \to C = \{f \in \mathbb{R}^{[0,\infty)}, f \text{ continua}\} \subseteq \mathbb{R}^{[0,\infty)}$
~~Basta verificare se $\mu_B(C) = \mathbb{P}(B \in C) = 1$~~ oppure no. sbagliato! perché $C \notin \mathcal{B}(\mathbb{R})^{[0,\infty)}$ e quindi $\mu_B(C)$ non è def

dim: Dimostriamo che C non è misurabile ($\notin \mathcal{B}(\mathbb{R})^{[0,\infty)}$)
Sia $B = \{B_t\}_{t\in[0,\infty)}$ un moto Browniano (i.e. soddisfa (a),(b),(c),(d))
N.B. - Assumo che $\exists$ un M.B.

per assurdo: Se $C \in \mathcal{B}(\mathbb{R})^{[0,\infty)}$, $\mu_B(C)$ sarebbe ben definito, e per (d) varrebbe 1.

$\mu_B(C) = \mathbb{P}(B\in C) = 1$ (d)

Definiamo un nuovo processo:

$\{Y_t(\omega)\}_{t\in[0,\infty)}$ $\quad Y_t(\omega) = 1_{\{B_1(\omega)+t \,\in\, \mathbb{Q}\}} = 1_{\{t\in \mathbb{Q}+B_1(\omega)\}}$

Quindi se per ω fissato guardo le traiettorie al variare di t queste fanno schifo, tipo ft di dirichlet

$\forall t$ fissato $\mathbb{P}(Y_t=0) = \mathbb{P}(B_1+t \notin \mathbb{Q}) = \underbrace{\mathbb{P}(B_1\notin \mathbb{Q}-t)}_{1-\mathbb{P}(B_1\in\mathbb{Q}-t)} = 1$

B_1 assolutam. continua, $\mathbb{Q}-t$ numerabile $\Big\} \Rightarrow \mathbb{P}(\cdot\in\cdot)=0$

$\forall t_1<\dots<t_n \quad \mathbb{P}(Y_{t_1}=0, \text{——}, Y_{t_n}=0) = 1$

Y_t è una versione del processo nullo! Ma ha traiettorie discontinue ($\forall\omega$ fissato). ($\Rightarrow$ tutte le sue traiettorie sono disc.)

Definiamo ora $B' = \{B'_t\}_{t\in[0,\infty)}$

$$B'_t(\omega) = B_t(\omega) + Y_t(\omega)$$

FATTO: B' soddisfa (a),(b),(c) perché $\forall\, t_1<t_2<\text{——}<t_n$

$\mathbb{P}(B_{t_1}=B'_{t_1}, \text{——}\, B_{t_n}=B'_{t_n})$

$= \mathbb{P}(Y_{t_1}=0, \text{——}\, Y_{t_n}=0) = 1$

Quindi $(B'_{t_1}, \text{——}\, B'_{t_n})$ ha la stessa legge di $(B_{t_1}, \text{——}\, B_{t_n})$

$\Rightarrow B'$ soddisfa (a),(b),(c)

Tuttavia B' non soddisfa (d) perché $\forall\omega\in\Omega$ $\; t\mapsto B'_t(\omega) = B_t(\omega)+Y_t(\omega)$ è discontinua in ogni pto (perché somma di continua + disc. in ogni pto)

$\Rightarrow$ la legge $\mu_{B'}$ di B' su $(\mathbb{R}^{[0,\infty)}, \mathcal{B}(\mathbb{R})^{[0,\infty)})$ coincide con μ_B perché è determinata dalle leggi finito dimensionali.

$\mu_B = \mu_{B'} \longrightarrow \mu_{B'}(C) = \mu_B(C) = 1$

Ma $\mu_{B'}(C) = \mathbb{P}(B'\in C) = \mathbb{P}(B' \text{ sia continua}) = \mathbb{P}(\emptyset) = 0$ ■

OSS: Senza usare il MB potevo fare la dimostrazione usando $\{Y_t\}$ e il processo nullo (per dimostrare che C non è misurabile)

OSS: Ci piacerebbe studiare, per un processo reale $B=\{B_t\}_{t\in[0,\infty)}$

- $M(\omega) = \sup_{t\in[0,1]\cap\mathbb{Q}} |B_t(\omega)|$ $\quad$ • $A(\omega) = \int_0^1 B_t(\omega)\,dt \to \lim_{N\to\infty}\sum_{i=0}^{N-1} B_{\frac{i}{N}}(\omega)\cdot\frac{1}{N}$

- $T(\omega) = \inf\{t\in(0,\infty) : B_t(\omega)=0\} \xrightarrow{\text{credo}} \inf\{t\in(0,\infty)\cap\mathbb{Q} : B_t(\omega)<\varepsilon \;\; \forall\varepsilon>0\}$

In generale, niente mi garantisce che queste siano funzioni misurabili di Ω (ossia v.a.) perché sono funzioni di una quantità più che numerabile di v.a. Tuttavia se so che $t\mapsto B_t(\omega)$ è continua le quantità $M(\omega)$, $A(\omega)$, $T(\omega)$ possono essere riscritte in funzione di una quantità numerabile di $B_t(\omega)$ (perché posso restringere a $t\in[0,1]\cap\mathbb{Q}$)

PROP: Se $\{B_t\}_{t\in[0,\infty)}$ è un moto Browniano, anche i seguenti processi X lo sono:

(a) RIFLESSIONE SPAZIALE $X_t := -B_t$ — RIBALTIAMO

(b) TRASLAZIONE TEMPORALE $X_t := B_{t_0+t} - B_{t_0}$ $\forall t_0 \geq 0$ fissato — PARTIAMO da t_0

(c) RIFLESSIONE TEMPORALE $X_t := B_{t_0-t} - B_{t_0}$ $\forall t_0 \geq 0$ fissato $t\in[0,t_0]$ — GUARDIAMO AL CONTRARIO

(d) RISCALAMENTO DIFFUSIVO $X_t := \frac{1}{\sqrt{c}} B_{ct}$ $\forall c>0$ fissato (TRASF. FRATTALE) (acceleriamo il moto)

(e) INVERSIONE TEMPORALE $X_t := t \cdot B_{1/t}$, $X_0 = 0$

24

6/06/2012

dim: (Si dimostra usando che è un processo gaussiano.)
Basta mostrare che X è processo gaussiano con la giusta media e cov. e con traiettorie continue.

(e) X è processo gaussiano? Sì.
Ogni combinazione lineare finita di componenti di X è una comb. lin. finita di comp. di B, dunque è una v.a. reale normale perché B è processo gaussiano.

$\mathbb{E}(X_t) = t\,\mathbb{E}(B_{1/t}) = 0$ perché $B_{1/t} \sim \mathcal{N}(0, 1/t)$

$Cov(X_s, X_t) = Cov(sB_{1/s}, tB_{1/t}) = st\, Cov(B_{1/s}, B_{1/t}) = st \min(\frac{1}{s}, \frac{1}{t}) =$

$s<t$ $\Rightarrow 1/s > 1/t$ $= s\cancel{t}\frac{1}{\cancel{t}} = s = \min(s,t)$

$$t \longmapsto X_t(\omega) = \begin{cases} 0 & \text{se } t=0 \\ tB_{1/t}(\omega) & \text{se } t\neq 0 \end{cases} \qquad \forall t\ B_t : (\Omega, \mathcal{A}, \mathbb{P}) \to \mathbb{R}$$

Per definizione di M.B. $\exists A \in \mathcal{A}$, $\mathbb{P}(A) = 1$ t.c. $\forall \omega \in A$
$s \longmapsto B_s(\omega)$ è fz continua

$\Rightarrow \forall \omega \in A$, la traiettoria $t \longmapsto X_t(\omega)$ è continua in $(0,\infty)$
(perché comp. di fz. continue)
Resta da mostrare che $t \longmapsto X_t(\omega)$ è continua in $t=0$ per q.o. ω (se su un insieme di $\mathbb{P} = 1$)

Sia $D = \{\omega \in \Omega$ t.c. $\lim_{t\downarrow 0, t\in\mathbb{Q}} X_t(\omega) = X_0(\omega) = 0\}$

Assumiamo che $\mathbb{P}(D) = 1$ (ovvero che converge a zero lungo i razionali !!) allora questo basta! Infatti:

$\mathbb{P}(A\cap D) = 1$, perché $\mathbb{P}(A) = \mathbb{P}(D) = 1$. Fissiamo $\omega \in A\cap D$ e poniamo $f(t) = X_t(\omega)$. Allora

(A) f è continua in $(0,\infty)$
(D) $f(t) \to f(0)$ per $t\downarrow 0$ con $t\in\mathbb{Q}$
$\Rightarrow_{(*)}$ $\lim_{t\downarrow 0} f(t) = f(0)$

Mostriamo (*). Abbiamo che per (D) $\forall \varepsilon>0\ \exists \delta>0 : |f(t)-f(0)| \leq \varepsilon$ $\forall t \in (0,\delta)\cap\mathbb{Q}$.

Ma se $t\in(0,\delta)$ ma $t\notin\mathbb{Q}$ $\exists t_n \in \mathbb{Q}\cap(0,\delta)$ t.c. $t_n \to t$ (densità)

Ma quindi $|f(t)-f(0)| \overset{\text{per }(A)}{=} \lim_{n\to\infty} |f(t_n) - f(0)| \leq \varepsilon$ $\forall n$

E quindi abbiamo mostrato che $\forall t\in(0,\delta)$ $|f(t)-f(0)| \leq \varepsilon$
e quindi che $\lim_{t\downarrow 0} f(t) = f(0)$ ☺

Dobbiamo quindi dimostrare che $\mathbb{P}(D) = 1$.

$\swarrow$ ft che tendono a x_0 sui razionali

Sia $G \subseteq \mathbb{R}^{[0,\infty)}$ def da $G := \{X = \{X_t\}_{t\in[0,\infty)} : \lim_{t\downarrow 0, t\in\mathbb{Q}} X_t = X_0\}$

Allora $G \in \mathcal{B}(\mathbb{R})^{[0,\infty)}$! Infatti

$X_t = \pi_t(X)$ con $\pi_t : \mathbb{R}^{[0,\infty)} \to \mathbb{R}$
$X \longmapsto \pi_t(X) = X_t$

π_t è misurabile $\forall t$

Possiamo scrivere $G := \{X \in \mathbb{R}^{[0,\infty)} : (\underbrace{\lim_{t\downarrow 0, t\in\mathbb{Q}} \pi_t - \pi_0}_{\Gamma : \mathbb{R}^{[0,\infty)} \to \mathbb{R}})(X) = 0\}$

$= \Gamma^{-1}(\{0\})$ ↳ per essere precisi Γ è

$\stackrel{!}{=} \Gamma_1^{-1}(\{0\}) \cap \Gamma_2^{-1}(\{0\})$ $\Gamma_1 = \liminf_{t\downarrow 0, t\in\mathbb{Q}} (\pi_t - \pi_0)$, $\Gamma_2 = \limsup (\pi_t - \pi_0)$

Γ è misurabile perché limsup/liminf di una famiglia numerabile di ft misurabili

Quindi $\{X \in G\} = \{\omega \in \Omega : X(\omega) \in G\}$ è un evento!

$(X = \{X_t\}_{t\in[0,\infty)} : (\Omega, \mathcal{A}, \mathbb{P}) \longrightarrow (\mathbb{R}^{[0,\infty)}, \mathcal{B}(\mathbb{R})^{[0,\infty)}))$

Ma $\{X \in G\} = D \Rightarrow \mathbb{P}(D) = \mathbb{P}(X \in G) = \mu_X(G)$

Ma $\mu_X = \mu_B$ perché X e B hanno le stesse leggi finito dimensionali (l'abbiamo mostrato all'inizio, sono entrambi processi gaussiani con la stessa media e covarianza)

$\Rightarrow \mathbb{P}(D) = \mu_X(G) = \mu_B(G) = \mathbb{P}(B \in G) = 1$

per la proprietà (d) del moto Browniano, dato che per hp B è MB
(a voler essere precisi $\{B \in G\} \supseteq A$
$\Rightarrow \mathbb{P}(B \in G) \geq \mathbb{P}(A) = 1$)

(le altre per esercizio) ■

ESERCIZIO: Sia $B = \{B_t\}_{t\in[0,\infty)}$ M.B., def su $(\Omega, \mathcal{A}, \mathbb{P})$ $B_t : \Omega \to \mathbb{R}$

3, fotocopia

$A = \{\{B_t\}_{t\in[0,1]} \text{ crescente}\} = \{t \longmapsto B_t \text{ è crescente per } t \in [0,1]\}$

$C_n = \{B_{i/2^n} - B_{(i-1)/2^n} \geq 0 \quad \forall\, 1 \leq i \leq 2^n\}$

$\Rightarrow$ quindi $A \subseteq \Omega$

Possiamo riscrivere $A = \{\omega \in \Omega : t \longmapsto B_t(\omega) \text{ è crescente per } t \in [0,1]\}$

oss che non userai
[$A = \{B \in H\}$ $H \subseteq \mathbb{R}^{[0,\infty)}$, $H = \{\{X_t\}_{t\in[0,\infty)}, X_t \text{ è crescente per } t \in [0,1]\}$
$\Rightarrow A = \{\omega \in \Omega : B(\omega) \in H\}$]

Anche C_n è un sottoinsieme di Ω, $C_n = \{\omega \in \Omega : B_{i/2^n}(\omega) - B_{(i-1)/2^n}(\omega) \geq 0 \ldots\}$

C_n è un evento (i.e. è misurabile) perché "dipende" da un numero finito (va bene anche numerabile) di cose misurabili.
Detto meglio:
$$C_n = (B_{1/2^n}, B_{2/2^n}, \ldots, B_{2^n/2^n})^{-1}\{J\} \qquad J \in \mathbb{R}^{2^n}$$

$\Rightarrow C_n \in \mathcal{A}$

Domanda $A \in \mathcal{A}$??
In generale non è detto perché è definito per mezzo di una cosa più che numerabile!

Ma in questo caso A potrebbe essere misurabile.
Facciamo un hp semplificativa (che in realtà non è semplificativa, ma va beh !!) : $t \mapsto B_t(\omega)$ continue $\forall \omega \in \Omega$

$A \in \mathcal{A}$ perché $A \overset{*}{=} \{t \mapsto B_t$ è crescente per $t \in [0,1] \cap \mathbb{Q}\}$

Mostriamo l'uguaglianza $*$
Vale perché B_t è funzione continua e quindi chiedere che sia crescente sui razionali o sui reali è uguale (se non facevo l'hp semplific. erano = a meno di un insieme di misura nulla)

Perché A scritto così è misurabile?
"Moralmente perché è def in termini di una quantità numerabile di v.a." Formalmente

$A \overset{?}{=} \bigcap_{n \in \mathbb{N}} C_n$ se è vero ok perché $C_n \in \mathcal{A}$ e A è $\cap$ num di eventi in $\mathcal{A}$.

E' evidente che $A \subseteq C_n \ \forall n$ perché se $\omega \in A$ allora B_t è crescente e allora lo è sui razionali diadici
Ma se $\omega \in C_n$ allora B_t è continua e crescente sui razionali diadici $\Rightarrow$ B_t è continua sui razionali !!

(a) Calcolare $\mathbb{P}(C_n)$. Supponiamo che $\{B_{t_i} - B_{t_{i-1}}\}_{i=1,\dots,k}$ sono indip e $B_t - B_s \sim \mathcal{N}(0, t-s)$ $\to k = 2^n$

$$\mathbb{P}(C_n) = \mathbb{P}\Big\{\bigcap_{i=1}^{2^n} \underbrace{\{B_{t_i} - B_{t_{i-1}} \geq 0\}}_{\text{eventi indipendenti}}\Big\} = \prod_{i=1}^{2^n} \mathbb{P}(\underbrace{B_{i/2^n} - B_{\frac{(i-1)}{2^n}}}_{\mathcal{N}(0,\dots)} \geq 0) = \prod_{i=1}^{2^n} \tfrac{1}{2} = \left(\tfrac{1}{2}\right)^{2^n}$$

(b) Mostrare che $A \subseteq C_n$

$\forall \omega \in A$, $t \mapsto B_t(\omega)$ è crescente per $t \in [0,1]$
$\Rightarrow$ a maggior ragione è crescente per $t \in \{\frac{1}{2^n}, \frac{2}{2^n}, \dots, \frac{2^n-1}{2^n}, 1\}$

In particolare $B_{i/2^n}(\omega) - B_{\frac{(i-1)}{2^n}}(\omega) \geq 0 \quad \forall i = 1, \dots, 2^n$

$\Rightarrow \omega \in C_n$

(c) Dedurre che $\mathbb{P}(A) = 0$

$0 \leq \mathbb{P}(A) \leq \mathbb{P}(C_n) = \frac{1}{2^{2^n}}$ passando al limite $n \to \infty$ $\Rightarrow \mathbb{P}(A) = 0$

dire che il moto B non è cresc. su ogni sottointerv.

(d) $\forall [a,b] \subseteq [0,1]$

$A_{[a,b]} = \{t \mapsto B_t$ è crescente in $t \in [a,b]\}$

$A_{[a,b]} \subseteq \Omega$, $\in \mathcal{A}$. Per i passi precedenti $\forall 0 \leq a < b \leq 1$ fissati $\mathbb{P}(A_{[a,b]}) = 0$

$D = \{\omega \in \Omega : t \mapsto B_t(\omega)$ non è crescente in nessun sottointervallo di $[0,1]\}$

MS $\overset{!}{=} \bigcap_{0 \leq a < b \leq 1} A_{[a,b]}^c$ $\supseteq$ $\subseteq$ è ovvio, $\supseteq$ dobbiamo mostrare che $\forall a<b \ \omega \in A^c_{[a,b]}$
se $a, b \in \mathbb{Q}$ ok perché $\omega \in MD$ (membro destro), se no $\exists a', b'$ $a < a' < b' < b$, $a', b' \in \mathbb{Q}$
$\Rightarrow \omega \in A^c_{[a',b']} \subseteq A^c_{[a,b]}$:)

Vogliamo mostrare che $\mathbb{P}(D) = 1$, $\mathbb{P}(A_{[a,b]}^c) = 1$ ma l'intersezione scritta così non è numerabile ma:

MD $\overset{!}{=} \bigcap_{a<b,\, a,b \in \mathbb{Q}} A_{[a,b]}^c$!!

ESERCIZIO: $B = \{B_t\}_{t\in[0,\infty)}$ M.B. continuo ($\forall \omega \in \Omega$)

5 fotocopia

(a) Mostrare che $A = \int_0^1 B_t \, dt$ è v.a. con legge $\mathcal{N}(\mu, \sigma^2)$ $\mu = ?$ $\sigma^2 = ?$

$$A(\omega) = \int_0^1 B_t(\omega)\, dt \qquad A : \Omega \longrightarrow \mathbb{R}$$

(non è ovvio che A sia misurabile) $\to A(\omega) = \lim(\text{SOMME PARZIALI})$

$$\forall \omega \in \Omega \qquad A(\omega) = \lim_{N\to\infty} \underbrace{\sum_{i=1}^{N} B_{\frac{i}{N}}(\omega) \cdot \frac{1}{N}}_{A_N(\omega)}$$

A_N, $\forall N$ fissato, è una v.a. (i.e. è misurabile) perché è somma finita di v.a. B_t

$$\Rightarrow A = \lim_{N\to\infty} A_N = \limsup_{N\to\infty} A_N \quad \text{è v.a.}$$

A_N è una variabile normale perché comb. lineare di normali che formano un processo gaussiano. ($\forall N$)

A è normale perché limite (q.c.) di Normali (in realtà nel nostro caso $\forall \omega$)

e inoltre:
$$\mu = \lim_{N\to\infty} \mathbb{E}(A_N)$$
$$\sigma^2 = \lim_{N\to\infty} Var(A_N)$$
Calcolarli così per esercizio (IE è banale, l'altro no)

Noi però le calcoliamo in un altro modo:

$$E(A) = \mathbb{E}\left(\int_0^1 B_t(\omega)\, dt\right) = \int_\Omega \mathbb{P}(d\omega)\left(\int_0^1 B_t(\omega) dt\right)$$

$$\overset{\text{FUBINI}}{=} \int_0^1 dt \left(\int_\Omega B_t(\omega)\, \mathbb{P}(d\omega)\right) = \int_0^1 dt\ \mathbb{E}(B_t) = 0 \quad \text{perché} \quad B_t \sim \mathcal{N}(0,t)$$

La media di A ci viene zero perché (fondamentalmente) B_t è simmetrico! (A è l'area di una traiettoria del M.B.)

Domanda: potevamo usare Fubini?? ovvero mi chiedo
$$(t,\omega) \longmapsto B_t(\omega) \quad \text{è misurabile? (CONGIUNTAMENTE)}$$
$$[0,\infty)\times\Omega \longrightarrow \mathbb{R}$$

Sì perché per ω fissato è continua in t!

(N.B. non basta mostrare che per ω fissato è mis in t e per t fissato è mis in ω, serve che per ω fissato è CONTINUA in t)

$$Var(A) = \mathbb{E}(A^2) - \cancel{\mathbb{E}(A)^2}^{=0} = \mathbb{E}\left(\left(\int_0^1 B_t dt\right)^2\right)$$

$$\overset{!}{=} \mathbb{E}\left(\left(\int_0^1 B_t(\omega)\, dt\right)\left(\int_0^1 B_s(\omega)\, ds\right)\right)$$

$$\overset{\text{FUBINI}}{=} \mathbb{E}\left(\int_{[0,1]\times[0,1]} B_t(\omega) B_s(\omega)\, dt\, ds\right)$$

$$\overset{\text{FUBINI}}{=} \int_{[0,1]\times[0,1]} dt\, ds \left(\overbrace{\mathbb{E}(B_t B_s)}^{Cov(B_t,B_s) = s\wedge t}\right) = \int_{[0,1]\times[0,1]} s\wedge t\ dt\, ds \overset{\text{provare a fare i conti}}{=} \frac{1}{3}$$

Se volessimo essere precisi dovremmo verificare che $\mathbb{E}\left(\int_0^1 |B_t|\, dt\right) < \infty$ e che $\mathbb{E}\left(\int_{[0,1]\times[0,1]} |B_t B_s|\, ds\, dt\right) < \infty$

$$\mathbb{E}\left(\int_0^1 |B_t|\,dt\right) = \int_0^1 \mathbb{E}(|B_t|)\,dt \underset{\text{Jensen}}{\leq} \int_0^1 \sqrt{\mathbb{E}(B_t^2)} \leq \int_0^1 \sqrt{t}\,dt < +\infty$$

$$\mathbb{E}\left(\int_{[0,1]\times[0,1]} |B_s B_t|\,ds\,dt\right) = \int_{[0,1]\times[0,1]} \mathbb{E}[|B_s B_t|]\,ds\,dt \underset{\text{Hölder}}{\leq} \int_{[0,1]\times[0,1]} \underbrace{\sqrt{\mathbb{E}(B_s^2)\,\mathbb{E}(B_t^2)}}_{=\sqrt{s\,t}} < +\infty$$

(b) Si mostri che $I(\omega) = \inf_{t\in[0,1]} B_t(\omega)$ NON È NORMALE

(I è v.a. perché posso fare l'inf sui razionali è lo stesso ☺)

Abbiamo che $I \leq 0$!! Quindi o I è δ oppure non può essere normale. Detto meglio:

$\mathbb{P}(I\leq 0) = 1$ ma $\forall Z \sim N(\mu,\sigma^2)$ $\mathbb{P}(Z\leq 0) < 1$ se $\sigma^2 \neq 0$

Quindi o I non è normale oppure $I\sim N(\mu,0)$ cioè $\mathbb{P}(I=\mu)=1$

Ma $\forall c \in \mathbb{R}_{<0}$ $\mathbb{P}(I<c) > 0$

$\mathbb{P}(I<c) \geq \mathbb{P}(B_1 < c) > 0$ perché $B_1 \sim N(0,1)$

sulla t a caso, non zero

ESERCIZIO: 4

(a) $\forall \alpha > 0$ $\exists C_\alpha > 0$, $C_\alpha < \infty$: $\mathbb{E}(|B_t|^\alpha) = C_\alpha t^{\alpha/2}$ $\forall t \geq 0$ $\Leftrightarrow$

$$\mathbb{E}\left(\left|\frac{B_t}{\sqrt{t}}\right|^\alpha\right) = C_\alpha \quad \forall t \geq 0$$

Ma $\frac{B_t}{\sqrt{t}} \sim N(0,1)$ $\rightarrow$ $\mathbb{E}\left(\left|\frac{B_t}{\sqrt{t}}\right|^\alpha\right) = \mathbb{E}(Z^\alpha) = C_\alpha$ con $Z \sim N(0,1)$

(b) $\forall$ $t_1 < t_2 < \dots < t_k < \infty$, $\forall$ $I_1,\dots,I_k \subseteq \mathbb{R}$ intervalli aperti non vuoti

$$\mathbb{P}(B_{t_1}\in I_1,\dots,B_{t_k}\in I_k) > 0$$

$$\mathbb{P}(B_{t_1}\in I_1,\dots B_{t_k}\in I_k) = \mathbb{P}(\overbrace{(B_{t_1},\dots B_{t_k})}^{\text{vettore gaussiano!}}\in I_1\times\dots\times I_k)$$

$$\overset{!}{=} \int_{I_1\times\dots\times I_k} \underbrace{f_{B_{t_1},\dots B_{t_k}}(x_1,\dots x_k)}_{>0}\,dx_1\dots dx_k > 0$$

25 8/06/2012

(c) $\forall \varepsilon > 0$ $\exists c > 0$ t.c. $\mathbb{P}(\sup_{t\in[0,1]} B_t > c) < \varepsilon$

Chiamiamo $X = \sup_{t\in[0,1]} B_t$ = max perché B_t è continua

X è v.a. ($X(\omega) = \sup_{t\in[0,1]} B_t(\omega)$)

Abbiamo che $\mathbb{P}(X=+\infty) = 0 \Leftrightarrow \forall\varepsilon>0$ $\exists c$: $\mathbb{P}(X>c)<\varepsilon$, infatti

$$\{X=+\infty\} = \bigcap_{c\in\mathbb{N}} \{X>c\}$$

e gli eventi $\{X>c\}$ sono decrescenti e quindi vale che

$$\mathbb{P}(X=+\infty) = \lim_{c\to\infty} \mathbb{P}(X>c)$$

Quindi vogliamo dimostrare che $X<+\infty$ q.c. ovvero $X(\omega) < +\infty$ per q.o. ω

Ma questo è vero perché $t \rightarrow B_t(\omega)$ è continua per q.o. ω e dunque, continua su un compatto $\Rightarrow$ limitata.

VARIAZIONE QUADRATICA del MOTO BROWNIANO:

Sia $\{B_t\}_{t\in[0,\infty)}$ M.B. Sia $\pi = \{s=t_0<t_1<\dots<t_n=t\}$ una partizione di $(n+1)$ punti di $[s,t]$, intervallo fissato.

Poniamo $|\pi| := \max_{i=1,\dots,n}(t_i - t_{i-1})$. Chiamiamo S_π VARIAZIONE QUADRATICA di B rel. a π:

$$S_\pi := \sum_{i=1}^{n} (B_{t_i} - B_{t_{i-1}})^2 \qquad (S_\pi \text{ è fz di } \omega, \text{ è v.a. reale } \geq 0)$$

PROP: $\forall\, 0 \le s < t < \infty$ fissati allora

$$\lim_{|\pi|\to 0} S_\pi = (t-s) \quad \text{in } L^2(\Omega, \mathcal{A}, \mathbb{P})$$

OSS: La prop dice che S_π è una famiglia di v.a. che converge a un numero! Cioè quando le passo della partizione è molto piccolo, la v.a. non è più tanto aleatoria!

dim: $S_\pi - (t-s) = \sum_{i=1}^{n} Y_i$ con $Y_i = (B_{t_i} - B_{t_{i-1}})^2 - (t_i - t_{i-1})$

Ricordiamoci che $(B_{t_i} - B_{t_{i-1}}) \sim N(0, t_i - t_{i-1})$ e indip.

- $Y_1, \dots, Y_n$ sono indipendenti e di media nulla

$\mathbb{E}(Y_i) = \mathbb{E}((B_{t_i} - B_{t_{i-1}})^2) - (t_i - t_{i-1}) = Var(B_{t_i} - B_{t_{i-1}}) - (t_i - t_{i-1}) = 0$

e funzioni di variabili indipendenti sono indipendenti (i.e. $X_1, \dots, X_n$ ind $\Rightarrow \varphi(X_1), \dots, \varphi(X_n)$ ind.)

$\Rightarrow Cov(Y_i, Y_j) = 0$ se $i \neq j$

$$\|S_\pi - (t-s)\|_{L^2}^2 = \mathbb{E}\left(\left(\sum_{i=1}^{n} Y_i\right)^2\right) \overset{\text{perché } \mathbb{E}(\sum_i Y_i)=0}{=} Var\left(\sum_{i=1}^{n} Y_i\right) \overset{\text{perché le cov}=0}{=} \sum_{i=1}^{n} Var(Y_i) \quad (*)$$

- $Y_i = (t_i - t_{i-1}) W_i$ ove $W_i = \left(\underbrace{\frac{B_{t_i} - B_{t_{i-1}}}{\sqrt{t_i - t_{i-1}}}}_{N(0,1)}\right)^2 - 1 = Z^2 - 1$, $Z = N(0,1)$

$$Var(Y_i) = (t_i - t_{i-1})^2 \underbrace{Var(Z^2 - 1)}_{c = \text{cost} > 0}$$

$$(*) = c \sum_{i=1}^{n} (t_i - t_{i-1})^2 \le c|\pi| \sum_{i=1}^{n} (t_i - t_{i-1}) = c|\pi|(t-s) \xrightarrow[|\pi|\to 0]{} 0$$

■

def: Data $f: [s,t] \longrightarrow \mathbb{R}$ funzione generica si dice VARIAZIONE (PRIMA) di f

$$V_{[s,t]}(f) := \sup_{\pi \text{ partiz di } [s,t]} \sum_{i=1}^{n} |f(t_i) - f(t_{i-1})|$$

N.B. $\pi = \{s = t_0 < t_1 < \dots < t_n = t\}$

OSS: Se $\exists\, g \in L^1([s,t])$ t.c. $f(x) = f(s) + \int_s^x g(y)\,dy$ (ovvero f ha derivata debole in L^1) allora

$$V_{[s,t]}(f) \le \int_s^t |g(y)|\,dy < +\infty$$

OSS: Una funzione è a variazione finita sse è differenza di due funzioni crescenti ovvero $\exists\, h_1, h_2: [s,t] \to \mathbb{R}$ cresc. t.c. $f(x) = h_1(x) - h_2(x)$

OSS: Se $f = h_1 - h_2$ con h_1, h_2 crescenti e continue a dx posso definire un integrale rispetto a "df", ovvero $\forall \phi: [s,t] \to \mathbb{R}$ mis e limitata posso definire

$$\int_s^t \phi(u)\,df(u) := \int_s^t \phi(u)\,dh_1(u) - \int_s^t \phi(u)\,dh_2(u)$$ ove dh_1 e dh_2 sono ordinarie misure con funz. di rip h_1, h_2 $(dh_1[a,b] = h_1(b) - h_1(a))$

CORO: Q.c., le traiettorie del M.B. hanno variazione infinita su ogni intervallo. cioè $\exists A \in \mathcal{A}$, $\mathbb{P}(A) = 1$ t.c. $\forall \omega \in A$, $\forall 0 \leq s < t < \infty$

$$V_{[s,t]}(B_\cdot(\omega)) = +\infty$$

dim: $S_\pi := \sum_{i=1}^{n} (B_{t_i} - B_{t_{i-1}})^2 \xrightarrow[|\pi| \to 0]{L^2} (t-s) > 0$

i.e. la somma di numeri molto piccoli al quadrato $\to c > 0$ dunque la $\sum$ dei numeri non al 2 $\to \infty$

$V_\pi := \sum_{i=1}^{n} |B_{t_i} - B_{t_{i-1}}|$

Sia $C \in \mathcal{A}$, $\mathbb{P}(C) = 1$: $\forall \omega \in C$ $t \longmapsto B_t(\omega)$ è continua.
Fissiamo $0 \leq a < b < \infty$. Sia $\pi = \{a = t_0 < t_1 < \dots < t_n = b\}$ partiz.

Possiamo definire $\Delta_\pi = \max_{i=1,\dots,n} |B_{t_i} - B_{t_{i-1}}|$ (in C, ove $t \mapsto B_t$ è continua)

Sia $\pi^{(k)}$ una succ. di partizioni di $[a,b]$ con $|\pi^{(k)}| \to 0$

- $\forall \omega \in C$ $\Delta_{\pi^{(k)}}(\omega) \xrightarrow{k \to \infty} 0$
  perché una fz continua su un compatto è unif. continua e $t \longmapsto B_t(\omega)$ è continua su $[a,b]$
- Sappiamo che $S_{\pi^{(k)}} \xrightarrow[k \to \infty]{L^2} (b-a)$ $\Rightarrow$ è quindi quasi certamente lungo una sottosuccessione.
  Per semplicità diciamo ancora $\pi^{(k)}$ la sottosucc.
  $\Rightarrow \exists D_{a,b} \in \mathcal{A}$, $\mathbb{P}(D_{a,b}) = 1$: $\forall \omega \in D_{a,b}$ $S_{\pi^{(k)}}(\omega) \xrightarrow[k \to \infty]{} (b-a)$
- Oss che $S_\pi(\omega) \leq \underbrace{\max_{i=1,\dots,n} |B_{t_i} - B_{t_{i-1}}|}_{\Delta_\pi(\omega)} \underbrace{\sum_{i=1}^{n} |B_{t_i} - B_{t_{i-1}}|}_{Var_\pi(\omega)}$

$\Rightarrow \forall \pi, \forall \omega$ $V_\pi(\omega) \geq \dfrac{S_\pi(\omega)}{\Delta_\pi(\omega)}$

Scegliamo $\omega \in C \cap D_{a,b}$, $\pi = \pi^{(k)}$ quindi

$$V_{\pi^{(k)}}(\omega) \geq \frac{\overbrace{S_{\pi^{(k)}}(\omega)}^{\to b-a > 0}}{\underbrace{\Delta_{\pi^{(k)}}(\omega)}_{\to 0}} \xrightarrow[k \to \infty]{} +\infty$$

Ma abbiamo che $V_{[a,b]}(B_\cdot(\omega)) = \sup V_{\pi^{(k)}}(\omega) = +\infty$ e dunque abbiamo mostrato che:
$\forall 0 < a < b$, $\forall \omega \in C \cap D_{a,b}$, $V_{[a,b]}(B_\cdot(\omega)) = +\infty$

$\Rightarrow \forall [a,b]$ fissato, $V_{[a,b]}(B_\cdot(\omega)) = +\infty$ per q.o. $\omega \in \Omega$

Sia $A = \bigcap_{\substack{0 \leq a < b < \infty \\ a,b \in \mathbb{Q}}} (C \cap D_{a,b})$

$A \in \mathcal{A}$, $\mathbb{P}(A) = 1$ (perché inters. num di eventi q.c.) e $\forall \omega \in A$

$$\Rightarrow V_{[a,b]}(B_\cdot(\omega)) = +\infty \quad \forall [a,b] \subseteq [0,\infty), \ a,b \in \mathbb{Q}$$

$\forall [s,t] \subseteq [0,\infty)$ con $s,t \in [0,\infty)$ (non nec. $\in \mathbb{Q}$), sia $[a,b] \subseteq [s,t]$, $a,b \in \mathbb{Q}$ abbiamo che

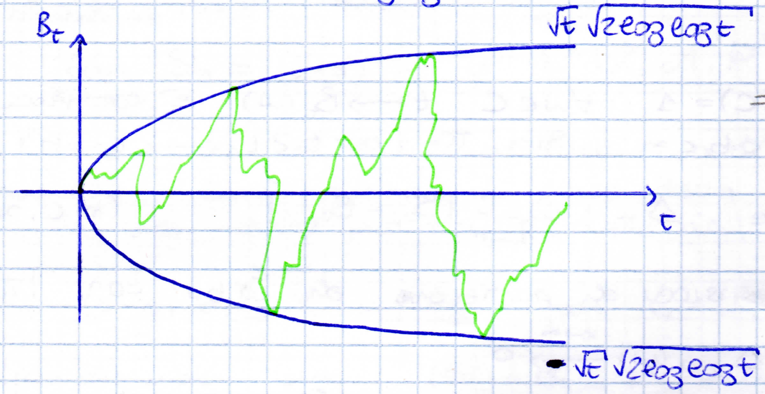
$$V_{[s,t]}(B_\cdot(\omega)) \geq V_{[a,b]}(B_\cdot(\omega)) = +\infty \quad \blacksquare$$

↗ LEGGE del LOGARITMO ITERATO

TEO: Se $B=\{B_t\}_{t\in[0,\infty)}$ è M.B. reale allora q.c.

- $\limsup_{t\to\infty} \frac{B_t}{\sqrt{t}\sqrt{2\log\log t}} = 1$
- $\liminf_{t\to\infty} \frac{B_t}{\sqrt{t}\sqrt{2\log\log t}} = -1$

$\sqrt{2\log\log t}$ è una costante moralmente, perché viene un numerello piccolo ☺



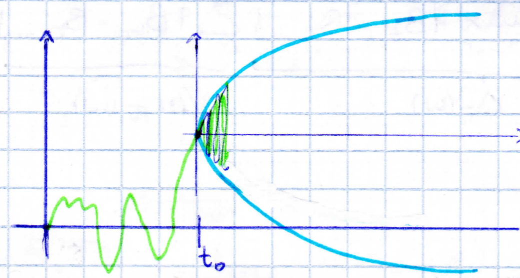
⟹ B tocca l'asse ∞ volte perché con $\mathbb{P}=1$ tocca le due fz

OSS: $\forall t_0>0$ $\underline{X_t} := \{t(B_{t_0+1/t}-B_{t_0})\}_{t\in[0,\infty)}$ è $\underline{MB}$ infatti:

$\overset{!}{=} \{tY_{1/t}\}_{t\in[0,\infty)}$ con $Y_s = B_{t_0+s}-B_{t_0}$

CORO: $\forall t_0\geq 0$ fissato q.c.

- $\limsup_{h\downarrow 0} \frac{B_{t_0+h}-B_{t_0}}{\sqrt{h}\sqrt{2\log\log 1/h}} = 1$
- $\liminf_{h\downarrow 0} \frac{B_{t_0+h}-B_{t_0}}{\sqrt{h}\sqrt{2\log\log 1/h}} = -1$



se fisso t_0 allora in un intorno destro la fz oscilla così tanto da toccare le due fz azzurre con $\mathbb{P}=1$

CORO: $\forall t_0\geq 0$ fissato $\limsup_{h\downarrow 0}\frac{B_{t_0+h}-B_{t_0}}{h} = +\infty$ e $\liminf_{h\downarrow 0}\frac{B_{t_0+h}-B_{t_0}}{h} = -\infty$ q.c.

quindi B non è derivabile in t_0.

def: Dato un processo $\{X_t\}_{t\in[0,\infty)}$ si definisce **FILTRAZIONE NATURALE** del processo la famiglia di σ-algebre $\mathcal{G}_t^X := \sigma(\{X_u\}_{u\in[0,t]})$

LEMMA: la proprietà (b) del M.B. (indipendenza degli incrementi) è equivalente alla proprietà:

(b') $\forall s<t$ la v.a. $B_t - B_s$ è indipendente da $\mathcal{G}_s^B = \sigma(\{B_u\}_{u\in[0,s]})$

PROP: Sia $B=\{B_t\}_{t\in[0,\infty)}$ M.B. i seguenti processi sono martingale risp a $\{\mathcal{G}_t^B\}_{t\in[0,\infty)}$

(a) $X_t = B_t$

(b) $X_t = B_t^2 - t$

(c) $X_t = \exp(\lambda B_t - \frac{\lambda^2}{2}t)$ $\quad\forall\lambda\in\mathbb{R}$

dim: (a) ADATTATO: perché B_t è $\mathcal{G}_t^B$-mis $\forall t$ per definizione di $\mathcal{G}_t^B$

INTEGRABILITÀ: $B_t\in L^1$ $\forall t\geq 0$ perché: $B_t\sim N(0,t) \Rightarrow B_t\in L^p$ $\forall p<+\infty$

$$\mathbb{E}(B_t \mid \mathcal{G}_s^B) \overset{?}{=} B_s \quad \forall s \le t.$$

$$\mathbb{E}((B_t - B_s) + B_s \mid \mathcal{G}_s^B) = \underbrace{\mathbb{E}(B_t - B_s \mid \mathcal{G}_s^B)}_{\text{indipend.}} + \mathbb{E}(B_s \mid \mathcal{G}_s^B)$$

$$\overset{!}{=} \underbrace{\mathbb{E}(B_t - B_s)}_{=0 \ \sim N(0,t-s)} + B_s = B_s \quad \text{q.c.}$$

(b) Verificare le prime 2 condizioni

$$\mathbb{E}(B_t^2 - t \mid \mathcal{G}_s^B) = \mathbb{E}(B_t^2 \mid \mathcal{G}_s^B) - t \qquad B_t^2 = ((B_t - B_s) + B_s)^2$$

$s \le t$

mis, perché comp. di fz misurabili

$$\overset{!}{=} \mathbb{E}(\underbrace{(B_t - B_s)^2}_{\text{ind}} \mid \mathcal{G}_s^B) + \mathbb{E}(B_s^2 \mid \mathcal{G}_s^B) + 2\,\mathbb{E}((B_t - B_s)B_s \mid \mathcal{G}_s^B) - t$$

$$\overset{!}{=} \underbrace{\mathbb{E}((B_t - B_s)^2)}_{=Var} + B_s^2 + 2B_s \underbrace{\mathbb{E}(B_t - B_s \mid \mathcal{G}_s^B)}_{\overset{\text{ind}}{=} \mathbb{E}(B_t - B_s) = 0} - t$$

$$\overset{!}{=} t - s + B_s^2 - t = B_s^2 - s$$

osserviamo che la M.B è l'unica martingala continua t.c. $B_t^2 - t$ è martingala! ☺ (non ci serve a niente)

(c) Verificare le prime 2 condizioni (la Normale ha momenti exp è $+\infty$)

$$\mathbb{E}(e^{\lambda B_t - \frac{\lambda^2}{2}t} \mid \mathcal{G}_s^B) = e^{-\frac{\lambda^2}{2}t}\,\mathbb{E}(e^{\lambda B_t} \mid \mathcal{G}_s^B)$$

$$\overset{!}{=} e^{-\frac{\lambda^2}{2}t}\,\mathbb{E}(e^{\lambda(B_t - B_s)} e^{\lambda B_s} \mid \mathcal{G}_s^B) \quad \text{mis.}$$

$$\overset{!}{=} e^{-\frac{\lambda^2}{2}t} \cdot e^{\lambda B_s} \cdot \mathbb{E}(e^{\lambda(B_t - B_s)} \mid \mathcal{G}_s^B) \quad \text{indip}$$

$$\overset{!}{=} e^{-\frac{\lambda^2}{2}t} e^{\lambda B_s}\,\mathbb{E}(e^{\lambda(B_t - B_s)}) \qquad B_t - B_s \sim N(0, t-s) = \sqrt{t-s}\,Z \text{ con } Z \sim N(0,1)$$

$$\mathbb{E}(e^{\lambda(B_t - B_s)}) = \mathbb{E}(e^{\lambda\sqrt{t-s}\,Z})$$

$$\mathbb{E}(e^{aZ}) \overset{*}{=} e^{\frac{a^2}{2}} \quad \forall a \in \mathbb{R} \quad \text{se } Z \sim N(0,1) \qquad * = \int_{-\infty}^{+\infty} \frac{e^{az} e^{-z^2/2}}{\sqrt{2\pi}}\,dz \quad \leftarrow \text{si fa completando il quadrato}$$

$$= e^{\frac{\lambda^2(t-s)}{2}} \qquad e^{az - z^2/2} = e^{\frac{a^2}{2}} e^{-\frac{(z-a)^2}{2}}$$

$$\mathbb{E}(e^{\lambda B_t - \frac{\lambda^2}{2}t} \mid \mathcal{G}_s^B) = e^{-\frac{\lambda^2}{2}t} e^{\lambda B_s} \cdot e^{\frac{\lambda^2(t-s)}{2}} = e^{\lambda B_s - \frac{\lambda^2}{2}s}$$

☺ ■

def: Dato uno spazio di prob. filtrato $(\Omega, \mathcal{A}, \{\mathcal{F}_t\}_{t\in[0,\infty)}, \mathbb{P})$ (filtr.) un processo reale $\{B_t\}_{t\in[0,\infty)}$ si dice $\{\mathcal{F}_t\}_{t\in[0,\infty)}$ - MOTO BROWNIANO se è un processo adattato alla filtrazione e se valgono:

(a) $B_0 = 0$ q.c.

(b') $\forall\, 0 \le s < t$, $(B_t - B_s)$ è indip. da $\mathcal{F}_s$

(c) $\forall\, 0 \le s < t$ $B_t - B_s \sim N(0, t-s)$

(d) per q.o. ω la traiettoria $t \longmapsto B_t(\omega)$ è continua

OSS: un $\{\mathcal{F}_t\}_{t\in[0,\infty)}$ - M.B. è un M.B. perché se il processo è adattato a $\mathcal{F}$ allora $\{\mathcal{F}_t\} \supseteq \{\mathcal{G}_t^B\}$ (filtr. naturale)

Ma allora $\forall\, 0 \le s < t$ $(B_t - B_s)$ è indip da $\mathcal{G}_s^B \Rightarrow$ (b') e (b') $\Leftrightarrow$ (b)

Detto meglio: $\forall u \le s$ B_u è $\mathcal{F}_u$-mis $\Rightarrow \mathcal{F}_s$-mis.

$\Rightarrow \mathcal{F}_s$ rende misurabili tutte le B_u con $u \le s$ $\Rightarrow \mathcal{F}_s \supseteq \mathcal{G}_s^B$ perché $\mathcal{G}_s^B$ è la più piccola σ-algebra t.c. B_u con $u \le s$ sono misurabili.

ESERCIZIO: Se $B = \{B_t\}_{t\in[0,\infty)}$ è un $\{\mathcal{F}_t\}_{t\in[0,\infty)}$ - MB allora i processi

$\{B_t\}_{t\in[0,\infty)}$; $\{B_t^2 - t\}_{t\in[0,\infty)}$; $\{e^{\lambda B_t - \frac{\lambda^2}{2}t}\}_{t\in[0,\infty)}$ $\forall \lambda \in \mathbb{R}$

sono $\{\mathcal{F}_t\}_{t\in[0,\infty)}$ - MARTINGALE

Richiami sull'indipendenza:

$(\Omega, \mathcal{A}, \mathbb{P})$ sp. prob. $\mathcal{F}, \mathcal{G} \subseteq \mathcal{A}$ σ-algebre sono indipendenti se

$$\mathbb{P}(A \cap B) = \mathbb{P}(A)\,\mathbb{P}(B) \qquad \forall A \in \mathcal{F},\ \forall B \in \mathcal{G}$$

OSS: Basta verificarlo per A, B in basi di $\mathcal{F}$ e $\mathcal{G}$ rispettivamente.

X, Y sono indip. $\iff$ lo sono $\underset{\{\{X\in C\} : C\in\mathcal{E}\}}{\sigma(X)}$ e $\underset{\{\{Y\in D\} : D\in\mathcal{F}\}}{\sigma(Y)}$ (X a val. in $(E,\mathcal{E})$, Y " " " $(F,\mathcal{F})$)

Due processi stocastici $X = \{X_t\}_{t\in I}$ $Y = \{Y_s\}_{s\in J}$ si dicono indipendenti se lo sono le σ-algebre da essi generate:

$\sigma(X) = \sigma(\{X_t\}_{t\in I})$ $\qquad \sigma(Y) = \sigma(\{Y_t\}_{t\in J})$

$\iff (X_{t_1}, \dots, X_{t_n})$ è indip da $(Y_{s_1}, \dots, Y_{s_m})$ $\forall n, m \in \mathbb{N}$, $t_1, \dots, t_n \in I$, $s_1, \dots, s_m \in J$

OSS$_1$: $\underset{\text{qualcosa a caso}}{(\dots)}$ è indip da $\mathcal{G}_t = \sigma(X_u)_{u\in[0,t]}$ $\iff$ $(\dots)$ è indip da $(X_{t_1}, \dots, X_{t_n})$ $\forall t_1, \dots, t_n \in [0,t]$

OSS$_2$: $\mathcal{F}$ è indip da $\mathcal{G}$ $\Rightarrow$ X è indip da Y $\forall X$ v.a. $\mathcal{F}$-mis, $\forall Y$ v.a. $\mathcal{G}$-mis

OSS$_3$: X, Y v.a. indip $\Rightarrow$ $f(X)$ è indip da $g(Y)$ $\forall f, g$ misurabile

LEMMA: $\forall$ processo stocastico $B = \{B_t\}_{t\in[0,\infty)}$ le condizioni (b) e (b') sono equivalenti

dim: (b) $\Rightarrow$ (b')

Dobbiamo mostrare che $(B_t - B_s)$ indip da $\mathcal{G}^B_s = \sigma(B_u, u \le s)$

Per l'oss basta mostrare che $(B_t - B_s)$ è indipendente da $(B_{u_1}, \dots, B_{u_k})$ $\forall k \in \mathbb{N}$ $\forall u_1 < \dots < u_k \le s$

Siano $t_0 = 0$, $t_1 = u_1$, $\dots$, $t_k = u_k$, $t_{k+1} = s$, $t_{k+2} = t$

Per (b) so che $(B_{t_1} - B_{t_0}), \dots, (B_{t_k} - B_{t_{k-1}}), (B_{t_{k+1}} - B_{t_k})$ $(B_{t_{k+2}} - B_{t_{k+1}})$ sono indip

$\Rightarrow \underset{(B_t - B_s)}{\overset{\|}{(B_{t_{k+2}} - B_{t_{k+1}})}}$ è indipendente da $\underset{(B_{u_1}, B_{u_2} - B_{u_1}, \dots, B_{u_k} - B_{u_{k-1}})}{\overset{\|}{(B_{t_1} - B_{t_0}, \dots, B_{t_k} - B_{t_{k-1}})}}$ $B_{t_{k+1}} - B_{t_k}$ non serve

$\Rightarrow B_t - B_s$ è indip da $F(\quad)$ $\forall F : \mathbb{R}^k \to \mathbb{R}^k$ mis.

Sia $F(x_1, x_2, \dots, x_k) = (x_1, x_1 + x_2, \dots, x_1 + x_2 + \dots + x_k)$

$F(B_{u_1}, B_{u_2} - B_{u_1}, \dots, B_{u_k} - B_{u_{k-1}}) = (B_{u_1}, B_{u_2}, \dots, B_{u_k})$

(b') $\Rightarrow$ (b) è analoga. ∎

OSS: Ogni M.B. $B = \{B_t\}_{t\in[0,\infty)}$ è un $\{\mathcal{G}^B_t\}_{t\in[0,\infty)}$ - M.B. ove $\mathcal{G}^B_t = \sigma(\{B_u\}_{u\in[0,t]})$ filtr. naturale.

In generale $\{\mathcal{G}^B_t\}_{t\in[0,\infty)}$ <u>non</u> è né completa né continua a dx cioè non è detto che soddisfi U.C.

Si può allora considerare l'ampliamento standard $\{\mathcal{F}_t\}_{t\in[0,\infty)}$ con

$\mathcal{F}_t = \sigma(\mathcal{G}^B_{t+}, \mathcal{H})$ $\quad$ $\mathcal{H} = \{A \in \mathcal{A}, A \subseteq C \text{ con } \mathbb{P}(C) = 0\}$

$\mathcal{G}^B_{t+} = \bigcap_{\varepsilon>0} \mathcal{G}^B_{t+\varepsilon}$ $\quad \to$ è CAD

PROP: Ogni M.B. $\{B_t\}_{t\in[0,\infty)}$ è un $\{\mathcal{F}_t\}_{t\in[0,\infty)}$ M.B. con $\mathcal{F}_t$ def. sopra.

OSS: Bisogna mostrare che B è adattato (ovvio, sempre vero) e che $B_t - B_s$ è indip da $\mathcal{F}_s$ (e questa è non banale! perché $\mathcal{F}_s \supseteq \mathcal{G}^B_s$)

CORO: $\mathcal{G}^B_{0+}$ è banale, cioè $\mathbb{P}(A) \in \{0,1\}$ $\forall A \in \mathcal{G}^B_{0+}$ **(LEGGE 0-1 di BLUMENTHAL)** (se B è M.B.)

$$\mathcal{G}^B_{0+} = \bigcap_{\varepsilon>0} \mathcal{G}^B_\varepsilon = \bigcap_{\varepsilon>0} \sigma(\{B_u\}_{u\in[0,\varepsilon]})$$

contiene gli eventi che hanno a che fare con il comportamento infinitesimale di B.

Per esempio: l'evento
- "B_t è derivabile in 0" $\in \mathcal{G}^B_{0+}$
- "B_t cambia segno a volte nell'intorno dell'origine"

Quindi ogni cosa a carattere infinitesimale sul M.B. o ha prob $= 0$ o $= 1$

PROPRIETÀ di MARKOV

Sia $B = \{B_t\}_{t\in[0,\infty)}$ un $\{\mathcal{F}_t\}_{t\in[0,\infty)}$-M.B. $\forall t_0 > 0$ fissato, il processo

$X = \{X_t = B_{t_0+t} - B_{t_0}\}_{t\in[0,\infty)}$ è M.B. **(MARKOV - SEMPLICE)**

TEO: Sia τ un tempo di arresto (per la filtr. $\{\mathcal{F}_t\}_{t\in[0,\infty)}$) t.c. $\mathbb{P}(\tau < +\infty) = 1$.

Hp: Definiamo il processo $X = \{X_t\}_{t\in[0,\infty)}$ mediante

$$X_t(\omega) = B_{\tau(\omega)+t} - B_{\tau(\omega)}$$

Sia $\{\mathcal{H}_t := \mathcal{F}_{\tau+t}\}_{t\in[0,\infty)}$ (N.B. $\mathcal{F}_\tau = \{A \in \mathcal{A} : A \cap \{\tau \le s\} \in \mathcal{F}_s \ \forall s \in [0,\infty)\}$)
($\mathcal{F}_{\tau+t}$ è ben def perché $\tau + t$ è t.a.)

Th: Allora $X = \{X_t\}_{t\in[0,\infty)}$ è un $\{\mathcal{H}_t\}_{t\in[0,\infty)}$-M.B. indipendente da $\mathcal{F}_\tau$.
(MARKOV - FORTE)

Vediamo le conseguenze del teo di Markov-forte. Vediamo come possono essere fatti i tempi d'arresto.

$a \in \mathbb{R}$ $\quad \tau_a := \inf\{t \in [0,\infty) : B_t = a\} \Rightarrow \tau_a$ è t.a.

Poniamo $S_t := \max_{0\le s\le t} B_s$

TEO: (PRINCIPIO di RIFLESSIONE) Sia $B = \{B_t\}_{t\in[0,\infty)}$ M.B. $\forall a, t > 0$ si hanno

$$\mathbb{P}(\tau_a \le t) = \mathbb{P}(S_t \ge a) = \underbrace{\mathbb{P}(|B_t| \ge a)}_{=2\mathbb{P}(B_t \ge a)} = \int_{\mathbb{R}\setminus(-a,a)} \frac{e^{-\frac{x^2}{2t}}}{\sqrt{2\pi t}}\,dx$$

perché B_t è simmetrica

dim: $\{\tau_a \le t\} = \{S_t \ge a\}$ infatti,

Sia $\omega \in \{\tau_a \le t\} \iff \tau_a(\omega) \le t \iff \exists s = s(\omega) \in [0,t] : B_{s(\omega)}(\omega) = a$

in queste afferm. si usa la continuità di B_t e il fatto che $B_0 = 0$

$\iff \sup_{0\le u\le t} B_u(\omega) \ge a \iff \{S_t \ge a\}$

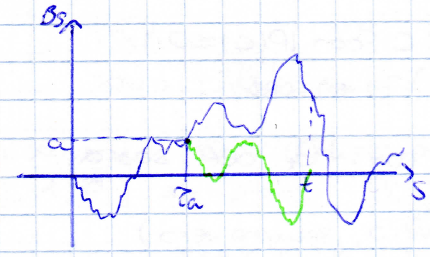
è contenuto $\subseteq$

$$\mathbb{P}(S_t \ge a) = \mathbb{P}(S_t \ge a, B_t \ge a) + \mathbb{P}(S_t \ge a, B_t < a)$$

$$\stackrel{!}{=} \mathbb{P}(B_t \ge a) + \mathbb{P}(\tau_a \le t, B_t < a)$$

Resta da mostrare che $\mathbb{P}(\underbrace{\tau_a \le t, B_t < a}) = \mathbb{P}(B_t \ge a)$

$= \{\tau_a \le t, B_t > a\}$



← se trasformo il M.B. in quello verde ho ancora un M.B. e i due eventi coincidono :)

Vediamolo in maniera rigorosa

Sia $C = C([0,\infty), \mathbb{R})$ (fz continue da $[0,\infty) \to \mathbb{R}$)

Sia $B: \Omega \longrightarrow C$
$\omega \longmapsto \{B_t(\omega)\}_{t \in [0,\infty)}$

Sia $H_t = \{(s,f) \in [0,\infty) \times C : s \le t,\ f(t-s) < 0\} \subseteq [0,\infty) \times C$

$\mathbb{P}(\tau_a \le t, \underbrace{B_t < a}) \overset{|}{=} \mathbb{P}(\tau_a \le t, X_{t-\tau(a)} < 0)$ ove $\underline{\underline{X_u}} = B_{\tau_a + u} - B_{\tau_a}$

$\{B_t - a < 0\} = \{B_t - B_{\tau_a} < 0\} = \{X_{t-\tau_a} < 0\}$

$\overset{|}{=} \mathbb{P}((\tau_a, X) \in H_t) = *$

Posso sostituire la v.a. (τ_a, X) con una v.a. con la stessa legge
$\Rightarrow$ la sostituisco con $(\tau_a, -X)$

τ_a e X sono indipendenti per Markov forte [X indip da $\mathcal{F}_{\tau_a}$ e τ_a è misurabile rispetto a $\mathcal{F}_{\tau_a}$]
quindi la legge congiunta della coppia (τ_a, X) su $[0,\infty) \times C$ è il prodotto delle leggi marginali.

$$\mu_{(\tau_a, X)} = \mu_{\tau_a} \otimes \mu_X \overset{|}{=} \mu_{\tau_a} \otimes \mu_{-X} = \mu_{(\tau_a, -X)}$$

perché $-X$ ha lo stesso legge di X perché per M. forte X è M.B.

$\Rightarrow (\tau_a, X)$ ha la stessa legge di $(\tau_a, -X)$

$$* = \mathbb{P}((\tau_a, -X) \in H_t)$$
$$\overset{!}{=} \mathbb{P}(\tau_a \le t, -X_{t-\tau_a} < 0)$$
$$\overset{!}{=} \mathbb{P}(\tau_a \le t, -(B_t - a) < 0)$$
$$\overset{!}{=} \mathbb{P}(\tau_a \le t, B_t > a) = \mathbb{P}(B_t > a) \quad \blacksquare$$

$\subset$

ESERCIZIO (4) : Densità di S_t.

$$\mathbb{P}(S_t \ge a) = 2\,\mathbb{P}(B_t \ge a) = 2\int_a^\infty f_{B_t}(x)\,dx = 2\left(1 - \int_{-\infty}^a f_{B_t}(x)\,dx\right)$$

è C^1 in $\underline{\underline{a}}$! (TEO FONDAMENTALE del CALCOLO INTEGRALE)

Segue che S_t è assolutamente continua e che $\mathbb{P}(S_t \ge a) = \int_a^\infty f_{S_t}(x)\,dx$

ESERCIZIO (4): $B=\{B_t\}_{t\in[0,\infty)}$ M.B. (REALE) CONTINUO

$\tau_a := \inf\{t\geq 0 : B_t = a\}$ $\quad S_t = \sup\limits_{0\leq u\leq t} B_u$

$\mathbb{P}(S_t \geq a) = \mathbb{P}(\tau_a \leq t) = \mathbb{P}(|B_t|\geq a) \quad \forall a,t>0$

(a) Mostrare che S_t è ass. continua e calcolarne la densità

FATTO: sia X v.a. reale e $F_X(x) = \mathbb{P}(X\leq x)$ $\forall x\in\mathbb{R}$
se F è C^1 a tratti (cioè C^0 su tutto $\mathbb{R}$ e der. a tratti)
$\Rightarrow X$ è ass. continua con densità

$$f_X(x) = F_X'(x)\, \mathbb{1}_{\{x\notin\{t_1,\dots,t_k\}\}}$$

Abbiamo che $\mathbb{P}(S_t<a) = \mathbb{P}(|B_t|<a)$ $\quad\forall a>0$

$\Rightarrow F_{S_t}(a^-) = F_{|B_t|}(a^-)$ (non è la fz di riparti. perché è col $<$, invece che $\leq$)

Ma dato che il membro destro è continuo allora segue

$$F_{S_t}(a) = F_{|B_t|}(a)$$

(in realtà c'è un discorso più generale che vale anche in casi più generali, ma qui non ce la fa)

In definitiva $S_t \overset{d}{=} |B_t|$ (hanno la stessa legge)

$F_{|B_t|}(a) = \mathbb{P}(|B_t|\leq a) = \mathbb{P}(\{B_t\leq a\}\setminus\{B_t<-a\})$

(*) $= F_{B_t}(a) - F_{B_t}(-a) \in C^\infty$ perché $B_t \sim \mathcal{N}$

Quindi F_{S_t} è C^1 in $(0,\infty)$, ma per $x<0$ $F_{S_t}(x)=0$
perché $S_t = \max\limits_{0\leq u\leq t} B_u \geq B_0 = 0$ $\Rightarrow F_{S_t}$ è C^1 in $(-\infty,0)$

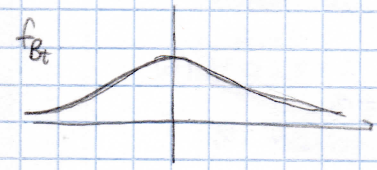
Basta mostrare che F_{S_t} è continua in zero, ovvero dobbiamo mostrare che se $x=0$ $F_{S_t}(0)=0$
(perché F_{S_t} è continua da dx in quanto fz di ripartizione e a sx è costante $=0$)

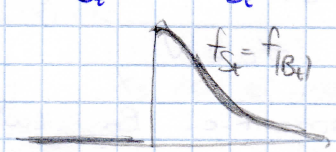
$F_{S_t}(0) = \mathbb{P}(\max\limits_{0\leq u\leq t} B_u \leq 0)$ così è scomodo, usiamo (*)

$$\lim_{a\downarrow 0} F_{S_t}(a) = \lim_{a\downarrow 0}(F_{B_t}(a) - F_{B_t}(-a)) = F_{B_t}(0) - F_{B_t}(-0) = 0$$

Tutto questo è per dire che possiamo derivare!

$f_{S_t}(a) = F_{S_t}'(a) = F_{B_t}'(a) + F_{B_t}'(-a) = f_{B_t}(a) + f_{B_t}(-a) =$ $\quad (a>0)$





$$= \frac{1}{\sqrt{2\pi t}} e^{-\frac{a^2}{2t}} + \frac{e^{-\frac{a^2}{2t}}}{\sqrt{2\pi t}} = \frac{2}{\sqrt{2\pi t}} e^{-\frac{a^2}{2t}}$$ $\quad B_t\sim\mathcal{N}(0,t)$

(b) $\mathbb{P}(\tau_a\leq t) \overset{?}{=} \mathbb{P}\left(|B_1|\geq \frac{a}{\sqrt{t}}\right)$

Sappiamo che $\mathbb{P}(\tau_a\leq t) = \mathbb{P}(|B_t|\geq a)$

$B_t \sim N(0,t) \qquad B_1 \sim N(0,1) \qquad \Rightarrow B_t \overset{d}{=} \sqrt{t}\, B_1$

$\Rightarrow \mathbb{P}(|B_t| \geq a) = \mathbb{P}(\sqrt{t}|B_1| \geq a) = \mathbb{P}(|B_1| \geq a/\sqrt{t})$

(c) $\mathbb{P}(\tau_a < \infty) = 1 \quad \forall a \in \mathbb{R}$

Restringiamoci a $a>0$ tanto τ_a e τ_{-a} hanno la stessa legge e $\tau_0 = 0$ perché $B_0 = 0$.

perché B_1 è ass. continua

$\mathbb{P}(\tau_a < \infty) = \mathbb{P}(|B_1| > 0) = 1 - \mathbb{P}(B_1 = 0) = 1$

segue dal pto (b)

$\{\tau_a < \infty\} \supseteq \{\tau_a \leq t\} \quad \Rightarrow \mathbb{P}(\tau_a < \infty) \geq \mathbb{P}(\tau_a \leq t) \quad \forall t$

$\Rightarrow \geq \lim_{t\to\infty} \mathbb{P}(\tau_a \leq t) = 1$

oppure con più precisione:

$\{\tau_a < \infty\} = \bigcup_{t\in\mathbb{N}} \{\tau_a \leq t\}$ perché sono eventi crescenti!

$\Rightarrow \mathbb{P}(\tau_a < \infty) = \lim_{t\to\infty} \mathbb{P}(\tau_a \leq t) = \lim_{t\to\infty} \mathbb{P}(|B_1| \geq \frac{a}{\sqrt{t}})$

$\bigcup_{t\in\mathbb{N}} \{|B_1| \geq \frac{a}{\sqrt{t}}\} = \{|B_1| > 0\} \qquad = \mathbb{P}(|B_1| > 0)$

N.B. per passare al limite devo avere $\bigcup$ o inters. di eventi crescenti / decrescenti.

(e) Si mostri che (c) $\Rightarrow$ q.c. $\limsup_{t\to+\infty} B_t = +\infty \quad \liminf_{t\to+\infty} B_t = -\infty$

Per simmetria possiamo dimostrarne una.

$\{\limsup_{t\to\infty} B_t < \infty\} = \{\exists c>0, \exists t_0>0 : B_t \leq c \ \forall t \geq t_0\} \subseteq \rightarrow$

$\rightarrow \subseteq \{\exists c' : B_t \leq c' \ \forall t \geq 0\}$ perché B_t è una fz. continua

$\Rightarrow \{\limsup_{t\to\infty} B_t < \infty\} \subseteq \{\exists c'' : \tau_{c''} = +\infty\}$

$\{\limsup_{t\to\infty} B_t < +\infty\} = \bigcup_{\substack{a\in\mathbb{N}\\ a>0}} \{\tau_a = +\infty\}$

$\mathbb{P}(\limsup B_t < +\infty) \leq \sum_{a\in\mathbb{N}} \mathbb{P}(\tau_a = \infty) = 0$

Vediamo la dimostrazione in un altro modo.

$\mathbb{P}(\tau_a < +\infty, \ \forall a \in \mathbb{N}) = \mathbb{P}(\bigcap_{a\in\mathbb{N}} \{\tau_a < +\infty\}) = 1$

Per q.o. $\omega \in \Omega \quad \tau_a(\omega) < +\infty \quad \forall a \in \mathbb{N}$

Per q.o. $\omega \in \Omega \quad \{\tau_a(\omega)\}_{a\in\mathbb{N}}$ sono t.c. $B_{\tau_a(\omega)}(\omega) = a$

(sotto)successione

$\limsup_{t\to\infty} B_t(\omega) \geq \limsup_{a\to\infty} B_{\tau_a(\omega)}(\omega) = +\infty$

ESERCIZIO: $B = \{B_t\}_{t\in[0,\infty)}$ $\beta = \{\beta_t\}_{t\in[0,\infty)}$ M. B. indipendenti

cioè $(B_{t_1}, \dots, B_{t_k})$ indip da $(\beta_{s_1}, \dots, \beta_{s_n})$ $\forall k, n \in \mathbb{N}$ $t_i, s_j \in [0,\infty)$

$X_t := B_{\frac{2}{3}t} - \beta_{\frac{1}{3}t}$ $X = \{X_t\}_{t\in[0,\infty)}$

(a) Dimostrare che X è processo gaussiano

$$\sum_{i=1}^{n} a_i X_{t_i} = \underbrace{\left(\sum_{i=1}^{n} a_i B_{\frac{2}{3}t_i}\right)}_{Z\sim N} - \underbrace{\left(\sum_{i=1}^{n} a_i \beta_{\frac{1}{3}t_i}\right)}_{W\sim N}$$

$Z \sim N$ perché comb lineare di comp. di un processo gaussiano

Z e W sono indipendenti perché $(B_{\frac{2}{3}t_1}, \dots, B_{\frac{2}{3}t_n})$ è indip da $(\beta_{\frac{1}{3}t_1}, \dots, \beta_{\frac{1}{3}t_n})$ e $Z = F(\ \cdot\ )$ è indip da $W = G(\text{---})$ altro vettore

(nel nostro caso $F = G$ ma va beh)

$\Rightarrow$ $Z - W$ è normale perché $Z, W \sim N$ e indip.

(b) X è un M.B.

Basta mostrare che $t \mapsto X_t$ è continua q.c. e poi che $\mathbb{E}(X_t) = 0$, $Cov(X_s, X_t) = \min(s,t)$ $\forall s,t$

$t \mapsto X_t$ è continua perché somma e comp. di funzioni continue.

Se vogliamo essere precisi, B q.c. continuo $\Rightarrow$ $\exists A \in \mathcal{A}$: $\mathbb{P}(A) = 1$: $\forall \omega \in A$ $t \mapsto B_t(\omega)$ è cont.

β q.c. continuo $\exists A' \in \mathcal{A}$: $\mathbb{P}(A') = 1$ $\forall \omega \in A'$ $t \mapsto \beta_t(\omega)$ è cont.

$\mathbb{P}(A \cap A') = 1$ e $\forall \omega \in A \cap A'$ $t \mapsto X_t(\omega)$ è continua.

$\mathbb{E}(X_t) = \mathbb{E}(B_{\frac{2}{3}t}) - \mathbb{E}(\beta_{\frac{1}{3}t}) = 0 - 0 = 0$

$$\underset{s\le t}{Cov(X_s, X_t)} = Cov(B_{\frac{2}{3}s}, B_{\frac{2}{3}t}) - Cov(B_{\frac{2}{3}s}, \beta_{\frac{1}{3}t}) - Cov(\beta_{\frac{1}{3}s}, B_{\frac{2}{3}t}) + Cov(\beta_{\frac{1}{3}s}, \beta_{\frac{1}{3}t})$$

$$\overset{!}{=} \frac{2}{3}s - 0 - 0 + \frac{1}{3}s = s = \min(s,t)$$

(c) Sia $Y_t := \beta_{\frac{2}{3}t} + B_{\frac{1}{3}t}$

$Cov(X_t, Y_t) = \dots$ fare i conti $\dots = 0$

X_t è indipendente da Y_t ? Sì se X_t, Y_t sono congiuntamente norm. cioè se $a \cdot X_t + bY_t$ è normale $\forall a, b$.
Viene sì ... finire...

(d) $\forall\, 0 < s < t < \infty$ X_s non è indipendente da Y_t

Si calcola Cov e viene $\neq 0$ (anche perché sono comp di proc. gauss.)

(e) $Z_t = aX_t + bY_t$ è M.B. $\forall a,b$ t.c. $a^2 + b^2 = 1$

27/09/2011: $\{X_n\}_{n\in\mathbb{N}}$ iid $\quad \mathbb{P}(X_n=+1)=\mathbb{P}(X_n=-1)=1/2$

$\mathcal{F}_n=\sigma(X_1,\dots,X_n)$

$S_0=1, \quad S_{n+1}=S_n+g(S_n)X_{n+1}$

con $g:[0,\infty)\longrightarrow[0,\infty)$ continua, $g(0)=0$ e $g(x)\le x \ \forall x$
e strettam. positiva

(a) $S_n \geq 0 \ \forall n$

$|S_{n+1}-S_n| = |g(S_n)|\cdot \cancel{|X_{n+1}|}^{=1} \le |S_n| \ \dots$

(b) S è una martingala e che $\exists \ S_\infty=\lim_{n\to\infty} S_n<\infty$ q.c.

$$\mathbb{E}(S_{n+1}\mid\mathcal{F}_n) = \mathbb{E}(S_n\mid\mathcal{F}_n)+\mathbb{E}(g(S_n)X_{n+1}\mid\mathcal{F}_n)$$
$$\overset{!}{=} S_n+\mathbb{E}(g(S_n)X_{n+1}\mid\mathcal{F}_{n+1})$$
$$\overset{!}{=} S_n + g(S_n)\underbrace{\mathbb{E}(X_{n+1}\mid\mathcal{F}_{n+1})}_{\overset{\text{indip.}}{=}\mathbb{E}(X_{n+1})=0}$$

Verificare che è L^1 (in realtà è anche limitata) ed è adattata

Per vedere che ammette limite, basta osservare che è una martingala positiva. Inoltre il limite non è L^1 (non è detto) ma è integrabile.

(c) Concludere che il limite è zero

$|S_{n+1}-S_n| = |g(S_n)| \xrightarrow{n\to\infty} g(S_\infty)$

$\downarrow n\to\infty$

$|S_\infty - S_\infty| = 0$ perché S_∞ è finito

$\Rightarrow g(S_\infty)=0$ q.c. ie $g(S_\infty(\omega))=0$ per q.o. ω

$\Rightarrow S_\infty(\omega)=0$ q.o. ω

(d) La martingala è unif. integrabile ?

No perché $\mathbb{E}(S_0)=1$ e $\mathbb{E}(S_\infty)=\mathbb{E}(0)=0$ e quindi S_n non converge in L^1!